

Exercice 1 (Examen final : 2020/2021). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

1. Montrer que le problème (Q) possède une unique solution.
2. Donner la fonction de Lagrange associé au problème (Q).
3. Écrire L'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q).
4. Avec un pas $\rho = 1$, calculer la solution du problème (Q).

Exercice 2 (Examen final : 2021/2022). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min \psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4, \\ (x, y, z) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$. On suppose que le problème (P) admet une solution unique.

1. Donner la condition de Lagrange associée au problème (P).
2. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n, y_n, z_n)^T$ et le multiplicateur de Lagrange λ_n avec $\rho > 0$ un pas fixe.
3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{n+1} = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right) \lambda_n - 2\rho.$$

4. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}.$$

5. Si $0 < \rho < 2/3$, déduire la solution du problème (P).

Exercice 3 (Examen final : 2022/2023). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min \psi(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \\ (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. On suppose que le problème (P) admet une solution unique.

-
1. Donner la condition de Lagrange associée au problème (P) .
 2. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n, y_n)^T$ et le multiplicateur de Lagrange λ_n avec $\rho > 0$ un pas fixe.
 3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = (1 - \rho)^n (\lambda_0 - 1) + 1.$$

4. Si $0 < \rho < 1$, calculer la solution du problème (P) .

Corrigé d'exercice 1: 1. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$, donc f est coercive et $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ fermé et convexe. D'autre part, la matrice hessienne de f est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

D'où f est strictement convexe. Le problème (Q) admet une solution unique.

2. La fonction de Lagrange associé au problème (Q) est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

3. L'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q) est donné par :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathcal{C}, \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \rho > 0, \\ \nabla f(x_k, y_k) + \lambda_k \nabla h(x_k, y_k) = 0, \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho h(x_k, y_k) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathcal{C}, \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \rho > 0, \\ 2x_k + \lambda_k = 0, \\ 2y_k + \lambda_k = 0, \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(x_k + y_k - 1). \end{cases} \quad (1)$$

4. Avec l'algorithme de Uzawa (1), on obtient :

$$x_k = y_k = -\frac{\lambda_k}{2} \text{ et } \lambda_{k+1} = (1 - \rho) \lambda_k - \rho.$$

Si $\rho = 1$, alors $\lambda_{k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, nous avons :

$$x_k = y_k = \frac{1}{2},$$

d'où $(1/2, 1/2)$ est la solution du problème (Q) .

Corrigé d'exercice 2: 1. On pose $h(x, y, z) = x + y - z$. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \psi(x, y, z) + \lambda h(x, y, z).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ 2z - 4 - \lambda = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

2. L'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) donné par :

$$2x_n + \lambda_n = 0, \quad (2)$$

$$2y_n + \lambda_n = 0, \quad (3)$$

$$2z_n - 4 - \lambda_n = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho(x_n + y_n - z_n). \quad (5)$$

3. En remplaçant (6)-(8) dans (5), on obtient :

$$\lambda_{n+1} = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right) \lambda_n - 2\rho.$$

4. Pour $n = 0$, nous avons $\lambda_0 = \lambda_0$. On suppose que $\lambda_n = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right) \lambda_n - 2\rho \\ &= \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{3\rho}{2}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}\right] - 2\rho \\ &= \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right)^{n+1} \left(\lambda_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. Si $0 < \rho < 2/3$, nous avons $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3}$. Alors, la solution du problème (P) est $(2/3, 2/3, 4/3)$.

Corrigé d'exercice 3: 1. On pose $h(x, y) = y - x$. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \psi(x, y) + \lambda h(x, y).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0, \\ 2(y - 1) + \lambda = 0, \\ y - x = 0. \end{cases}$$

2. L'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) donné par :

$$2x_n - \lambda_n = 0, \quad (6)$$

$$2(y_n - 1) + \lambda_n = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho(y_n - x_n). \quad (8)$$

En remplaçant (6)-(7) dans (8), on obtient :

$$\begin{cases} x_n = \frac{\lambda_n}{2}, \\ y_n = -\frac{\lambda_n}{2} + 1, \\ \lambda_{n+1} = (1 - \rho) \lambda_n + \rho. \end{cases}$$

3. Pour $n = 0$, nous avons $\lambda_0 = \lambda_0$. On suppose que $\lambda_n = (1 - \rho)^n (\lambda_0 - 1) + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= (1 - \rho) \lambda_n + \rho \\ &= (1 - \rho) [(1 - \rho)^n (\lambda_0 - 1) + 1] + \rho \\ &= (1 - \rho)^{n+1} (\lambda_0 - 1) + 1. \end{aligned}$$

4. Si $0 < \rho < 1$, nous avons $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Alors, la solution du problème (P) est $(1/2, 1/2)$.