

Exercice 1 (Examen final 2023/2024). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 2\}$.

1. Montrer que le problème (3) admet au moins une solution global.
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

où $h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2$.

- (a) Montrer que le problème (4) admet au moins une solution global.
- (b) Écrire la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (4).
- (c) Résoudre le problème (4).
- (d) Dédire les solutions du problème (3).

Exercice 2 (Examen final 2023/2024). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min q_k(x, y) = f(x, y) + \gamma_k (g^+(x, y))^2 \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec $g(x, y) = 1 - x - y$ et la suite $\gamma_k > 0$ et $\gamma_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, et

$$g^+(x, y) = \max \{0, g(x, y)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x, y) \leq 0, \\ g(x, y) & \text{si } g(x, y) > 0, \end{cases}$$

On note (x_k, y_k) la solution de problème (P_k) . On admettra que la fonction $q_k(x, y)$ est convexe. On rappelle que le gradient de $(g^+)^2$ est donné par $\nabla (g^+)^2 = 2g^+ \nabla g$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) .
2. Calculer la solution du problème (P_k) pour $\gamma_k = k$.
3. Dédire la solution du problème (P) .

4. On considère l'approximation du multiplicateur de KKT $\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k)$.

(a) Calculer μ_k .

(b) En déduire le multiplicateur de KKT associé à la contrainte $g(x, y) \leq 0$.

Exercice 3 (Examen final 2024/2025). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2y, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (3)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$.

1. Montrer que le problème (3) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4)$$

où $h(x, y) = x + y - 2$.

(a) Montrer que le problème (4) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .

(b) Écrire la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (4).

(c) Résoudre le problème (4).

(d) En déduire la solution du problème (3).

Exercice 4 (Examen final 2024/2025). Soit (P) le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - x \\ x + y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min \Phi_k(x, y) = f(x, y) + k \left[(g_1^+(x, y))^2 + (g_2^+(x, y))^2 \right] \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = 1 - x$, $g_1^+(x, y) = \max\{0, g_1(x, y)\}$ et $g_2^+(x, y) = \max\{0, g_2(x, y)\}$.

On admettra que la fonction $\Phi_k(x, y)$ est strictement convexe. On rappelle que les gradients de $(g_1^+)^2$ et $(g_2^+)^2$ sont donnés par $\nabla (g_1^+)^2 = 2g_1^+ \nabla g_1$ et $\nabla (g_2^+)^2 = 2g_2^+ \nabla g_2$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) .

2. En supposant que $x + y > 0$ et $1 - x > 0$, donner (x_k, y_k) la solution du problème (P_k) en fonction de k .

3. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $x_k + y_k > 0$ et $1 - x_k > 0$.

4. En déduire une solution du problème (P) .

5. On considère l'approximation du vecteur des multiplicateurs de K.K.T tels que

$$\mu_k^1 = 2kg_1^+(x_k, y_k) \text{ et } \mu_k^2 = 2kg_2^+(x_k, y_k).$$

(a) Calculer μ_k^1 et μ_k^2 .

(b) En déduire les multiplicateurs de K.K.T associés aux contraintes $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$.

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty \implies f \text{ est coercive.}$$

D'autre part, soit $(x_k, y_k) \in D$ telle que $(x_k, y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors,

$$\begin{aligned} (x_k, y_k) \in D &\implies x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2 = 2, \\ &\implies \bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 = 2, \\ &\implies (\bar{x}, \bar{y}) \in D, \end{aligned}$$

d'où, D est fermé. Alors, le problème (3) admet au moins une solution global.

2. Soit $\gamma > 0$ et $h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2$.

(a) On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 + \gamma \left(1 + \sin 2\theta - \frac{2}{r^2} \right) \right] = +\infty \implies \varphi_\gamma \text{ est coercive.}$$

Alors, le problème (4) admet au moins une solution global.

(b) La condition nécessaire d'optimalité de premier ordre du problème (4) :

$$\begin{cases} x + 2\gamma(x^2 + 2xy + y^2 - 2)(x + y) = 0, \\ y + 2\gamma(x^2 + 2xy + y^2 - 2)(x + y) = 0. \end{cases}$$

(c) Les solutions du problème (4) sont $\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}} \right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}, -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}} \right)$.

(d) Les solutions du problème (3) sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$.

Corrigé d'exercice 2: 1. La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) :

$$\begin{cases} 3x_k - \gamma_k g^+(x_k, y_k) = 0, \\ 2y_k - \gamma_k g^+(x_k, y_k) = 0. \end{cases}$$

2. On pose $\gamma_k = k$.

— Si $g^+(x_k, y_k) = 0$, alors $x_k = y_k$ (impossible).

— Si $g^+(x_k, y_k) = g(x_k, y_k) > 0$, nous avons :

$$\begin{cases} 3x_k - k(1 - x_k - y_k) = 0, \\ 2y_k - k(1 - x_k - y_k) = 0. \end{cases} \implies y_k = \frac{3}{2}x_k.$$

Alors, $x_k = \frac{2k}{3+5k}$ et $y_k = \frac{3k}{3+5k}$.

3. Nous avons : $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{5}$ et $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{3}{5}$.

4. On pose $\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k)$.

(a) Nous avons :

$$\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k) = 2k(1 - x_k - y_k) = \frac{6k}{3 + 5k}.$$

(b) Nous avons : $\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{6}{5}$.

Corrigé d'exercice 3: 1. On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 + \sin \theta \cos \theta - \frac{2 \sin \theta}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 + \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{2 \sin \theta}{r} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

d'où f est coercive. D'autre part, soit $(x_n, y_n) \in D$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors,

$$(x_n, y_n) \in D \Rightarrow x_n + y_n = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} + \bar{y} = 2,$$

d'où D est fermé. Donc, le problème (3) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Soit $\gamma > 0$. Nous avons :

(a) On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on a :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 + \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{2 \sin \theta}{r} + \gamma \left(\cos \theta + \sin \theta - \frac{2}{r} \right)^2 \right] = +\infty,$$

d'où $\varphi_\gamma(x, y)$ est coercive. Donc, le problème (4) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .

(b) La condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (4) est donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_\gamma(x_\gamma^*, y_\gamma^*) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_\gamma^* + y_\gamma^* + \gamma(x_\gamma^* + y_\gamma^* - 2) = 0, \\ 2y_\gamma^* + x_\gamma^* - 2 + \gamma(x_\gamma^* + y_\gamma^* - 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \gamma)x_\gamma^* + (1 + \gamma)y_\gamma^* = 2\gamma, \\ (1 + \gamma)x_\gamma^* + (2 + \gamma)y_\gamma^* = 2 + 2\gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Nous avons :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 + \gamma & 1 + \gamma \\ 1 + \gamma & 2 + \gamma \end{vmatrix} = 3 + 2\gamma \neq 0.$$

et

$$x_\gamma^* = \frac{\begin{vmatrix} 2\gamma & 1 + \gamma \\ 2 + 2\gamma & 2 + \gamma \end{vmatrix}}{3 + 2\gamma} = \frac{-2}{3 + 2\gamma}; \quad y_\gamma^* = \frac{\begin{vmatrix} 2 + \gamma & 2\gamma \\ 1 + \gamma & 2 + 2\gamma \end{vmatrix}}{3 + 2\gamma} = \frac{4 + 4\gamma}{3 + 2\gamma}.$$

(d) Nous avons :

$$x_\gamma^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^* = 0; \quad y_\gamma^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y^* = 2,$$

alors, $(0, 2)$ est une solution globale du problème (3).

Corrigé d'exercice 4: 1. La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) est donnée par :

$$\nabla \Phi_k(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y - 1 + 2k [g_1^+(x, y) - g_2^+(x, y)] = 0, \\ 2y + x + 2kg_1^+(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. En supposant que $x + y > 0$ et $1 - x > 0$. Alors, on a :

$$g_1^+(x, y) = g_1(x, y) = x + y \text{ et } g_2^+(x, y) = g_2(x, y) = 1 - x,$$

donc,

$$\begin{cases} 6x + y - 1 + 2k [2x + y - 1] = 0, \\ 2y + x + 2k(x + y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6 + 4k)x + (1 + 2k)y = 1 + 2k, \\ (1 + 2k)x + (2 + 2k)y = 0. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\det = \begin{vmatrix} 6 + 4k & 1 + 2k \\ 1 + 2k & 2 + 2k \end{vmatrix} = 4k^2 + 16k + 13 \neq 0,$$

et

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 2k & 1 + 2k \\ 0 & 2 + 2k \end{vmatrix}}{4k^2 + 16k + 13} = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13},$$

et

$$y_k = \frac{\begin{vmatrix} 6 + 4k & 1 + 2k \\ 1 + 2k & 0 \end{vmatrix}}{4k^2 + 16k + 13} = -\frac{4k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 16k + 13}$$

3. Nous avons :

$$x_k + y_k = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13} - \frac{4k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 16k + 13} = \frac{2k + 12}{4k^2 + 16k + 13} > 0$$

et

$$1 - x_k = 1 - \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13} > 0.$$

4. Nous avons :

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (1, -1),$$

d'où $(1, -1)$ est une solution du problème (P) .

5. Nous avons :

$$(a) \mu_k^1 = 2kg_1^+(x, y) = \frac{2k(2k+12)}{4k^2+16k+13} \text{ et } \mu_k^2 = 2kg_2^+(x_k, y_k) = \frac{2k(10k+11)}{4k^2+16k+13}.$$

(b) Nous avons :

$$\mu_k^1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu_1 = 1 \text{ et } \mu_k^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu_2 = 5.$$