

Exercice 1. Soient Ω un sous-ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

☞ f est fortement convexe c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in \Omega, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

☞ L'application ∇f est lipschitzienne c'est à dire

$$\exists M > 0, \forall x, y \in \Omega, \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \Omega \end{cases}$$

1. Montrer que le problème (P) admet une solution globale unique notée par x^* .
2. Soit (x_k) la suite de la méthode du gradient projeté donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ x_{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)], \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathcal{P}_\Omega$ désigne l'opérateur de projection orthogonal sur Ω . S'il existe deux réels a et b tels que α_k satisfasse $0 < a < \alpha_k < b < 2\alpha/M^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la méthode du gradient définie par (1) converge pour tout choix de x_0 , de façon géométrique, autrement dit

$$\exists \beta \in]0, 1[, \|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|.$$

Exercice 2 (Examen final, 2019/2020). On considère le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} x^T A x \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n , symétrique et définie positive et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 2\}$.

Nous appliquons à ce problème l'algorithme de gradient projeté à pas fixe suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha \nabla f(x^k)], \end{cases} \quad (3)$$

où $\alpha > 0$ et $\mathcal{P}_\Omega$ est l'opérateur orthogonal de projection sur Ω .

1. Écrire $\mathcal{P}_\Omega(x)$ en fonction de x .

2. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Résoudre le problème (2).
- (b) Soit $y^k = x_1^k/x_2^k$. Montrer que (y^k) est une suite géométrique.
- (c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Montrer que la suite (x^k) définie par (3) converge vers une solution optimale de problème (2).

Exercice 3 (Examen final, 2021/2022). Soit le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle - \langle c, x \rangle \\ Ax = b, \end{cases} \quad (4)$$

où Q est une matrice carré d'ordre n symétrique et définie positive, $c \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m < n$ et $\text{rang}(A) = m$. Soit (x^k) la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal définie par :

$$\begin{cases} x^0 \in \Omega, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)] = x^k - \alpha_k P \nabla f(x^k), \forall k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_k \text{ est le point de minimum global de la fonction } \varphi(\alpha) = f[x^k - \alpha P \nabla f(x^k)]. \end{cases}$$

où $P = I - A^T (AA^T)^{-1} A$.

1. Montrer que la suite (x^k) est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k,$$

où $g_k = \nabla f(x^k) = Qx^k - c$.

- 2. Montrer que $g_{k+1}^T P g_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 3. Montrer que le vecteur $x^{k+1} - x^k$ est orthogonal sur le vecteur $x^{k+2} - x^{k+1}$.

Corrigé d'exercice 1: 1. On pose $g(t) = f[x + t(y - x)]$ pour tout $x, y \in \Omega$ et $t \in [0, 1]$.
Nous avons :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x \rangle dt \\ &\geq \alpha \int_0^1 t \|y - x\|^2 dt \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$f(y) \geq f(x) - \|\nabla f(x)\| \|y - x\| + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

On fixe $x = x_0 \in \Omega$, on obtient

$$\lim_{\|y - x_0\| \rightarrow +\infty} \left[f(x_0) - \|\nabla f(x_0)\| \|y - x_0\| + \frac{\alpha}{2} \|y - x_0\|^2 \right] = +\infty \Rightarrow \lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty,$$

d'où, la fonction f est coercive et Ω fermé, donc le problème (P) admet au moins un point de minimum global, mais la fonction f est fortement convexe et Ω est convexe c'est à dire l'unicité de la solution globale notée par x^* .

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|\mathcal{P}_\Omega(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) - \mathcal{P}_\Omega(x^* - \alpha_k \nabla f(x^*))\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^* - \alpha_k (\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*))\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha_k^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\alpha_k + M^2\alpha_k^2) \|x_k - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta \|x_k - x^*\|, \text{ où } \beta = \max \left\{ \sqrt{1 - 2\alpha a + M^2 a^2}, \sqrt{1 - 2\alpha b + M^2 b^2} \right\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq \beta \|x_0 - x^*\| \\ \|x_2 - x^*\| &\leq \beta \|x_1 - x^*\| \\ &\vdots \\ \|x_{k-1} - x^*\| &\leq \beta \|x_{k-2} - x^*\| \\ \|x_k - x^*\| &\leq \beta \|x_{k-1} - x^*\|, \end{aligned}$$

Par multiplication, on obtient :

$$\|x_k - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|.$$

D'autre part,

$$0 < 1 - 2\alpha a + M^2 a^2 < 1 \text{ et } 0 < 1 - 2\alpha b + M^2 b^2 < 1 \Rightarrow 0 < \beta < 1 \Rightarrow x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x^*.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. L'opérateur de projection orthogonal $\mathcal{P}_\Omega$ est donné par :

$$\mathcal{P}_\Omega(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \Omega, \\ \frac{2x}{\|x\|} & \text{si } x \notin \Omega, x \neq 0. \end{cases}$$

2. Soit $x = (x_1, x_2)^T$. Nous avons :

(a) La fonction de Lagrange de (2) est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda (\|x\|^2 - 4) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda (x_1^2 + x_2^2 - 4),$$

d'où la condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ x_2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda) x_1 = 0, \\ (1 + 2\lambda) x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases}$$

- i. Si $\lambda = -1$, alors $x_2 = 0$ et $x_1 = \pm 2$, les points sont $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.
- ii. Si $\lambda = -1/2$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 = \pm 2$, les points sont $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

D'autre part, nous avons :

$$2 = f(0, 2) = f(0, -2) < f(2, 0) = f(-2, 0) = 4,$$

d'où $(0, 2)$ et $(0, -2)$ sont solutions optimales de (2).

(b) On pose $x^k = (x_1^k, x_2^k)^T$. Nous avons :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha \nabla f(x^k)] = 2 \frac{x^k + \alpha \nabla f(x^k)}{\|x^k + \alpha \nabla f(x^k)\|} = 2\beta_k (I - \alpha A) x^k,$$

où $\beta_k = 1 / \|(I - \alpha A) x^k\|$. Dans le cas particulier de A , nous avons :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 2\beta_k (1 - 2\alpha) x_1^k, \\ x_2^{k+1} = 2\beta_k (1 - \alpha) x_2^k. \end{cases} \Rightarrow y^{k+1} = \frac{x_1^{k+1}}{x_2^{k+1}} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right) y^k.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\frac{y^{k+1}}{y^k} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right) \Rightarrow (y^k) \text{ est une suite géométrique.}$$

(c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, y^k = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right)^k y^0.$$

D'où, $\alpha > 0$ et $(1 - 2\alpha) / (1 - \alpha) < 1$, donc $y^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} 2 = \|x^k\| &= \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2} \\ &= |x_2^k| \sqrt{1 + (y^k)^2}, \end{aligned}$$

D'où,

$$|x_2^k| = \frac{2}{\sqrt{1 + (y^k)^2}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 2.$$

c'est à dire

$$x_2^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 2 \quad \text{où} \quad x_2^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -2.$$

Alors,

$$y^k = \frac{x_1^k}{x_2^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow x_1^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'où, la suite converge vers $(0, 2)$ ou $(0, -2)$ solutions optimales du problème (2).

Corrigé d'exercice 3: 1. Soit x^k la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal pour le problème (4) définie par :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x - \alpha_k \nabla f(x^k)] = x^k - \alpha_k P \nabla f(x^k),$$

où α_k est le point de minimum global de la fonction $\varphi(\alpha) = f(x^k - \alpha P \nabla f(x^k))$. Nous avons :

$$g_k = \nabla f(x^k) = Qx^k - c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = f[x^k - \alpha P g_k] &\Rightarrow \varphi'(\alpha_k) = \langle \nabla f(x^k - \alpha_k P g_k), P g_k \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle Q(x^k - \alpha_k P g_k) - c, P g_k \rangle = 0, \\ &\Rightarrow \langle Qx^k - c, P g_k \rangle - \alpha_k \langle Q P g_k, P g_k \rangle = 0, \\ &\Rightarrow \langle g_k, P g_k \rangle = \alpha_k \langle Q P g_k, P g_k \rangle, \\ &\Rightarrow \alpha_k = \frac{\langle g_k, P g_k \rangle}{\langle Q P g_k, P g_k \rangle} = \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k}. \end{aligned}$$

D'où, la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k.$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} g_{k+1}^T P g_k &= \langle Qx^{k+1} - c, P g_k \rangle = \left\langle Q \left[x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k \right] - c, P g_k \right\rangle \\ &= \langle g_k, P g_k \rangle - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} \langle Q P g_k, P g_k \rangle \\ &= \langle g_k, P g_k \rangle - g_k^T P g_k = 0. \end{aligned}$$

3. Nous avons :

$$\langle x^{k+2} - x^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle = \alpha_k \alpha_{k+1} \langle P g_{k+1}, P g_k \rangle = \alpha_k \alpha_{k+1} g_{k+1}^T P g_k = 0.$$