

Exercice 1. Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 1\}$.

1. Montrer que le problème (1) admet une solution globale.
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

où $h(x, y) = x^2 - y - 1$.

- (a) Montrer que le problème (2) admet une solution globale.
- (b) Résoudre le problème (2).
- (c) Déduire la solution du problème (1).

Exercice 2. Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (3)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 1\}$.

1. Montrer que le problème (3) admet une solution globale.
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4)$$

où $h(x, y) = x^2 + y - 1$.

- (a) Montrer que le problème (4) admet une solution globale.
- (b) Résoudre le problème (4).
- (c) Déduire la solution du problème (3).

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons f est continue sur D et $f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Alors, f est coercive. D'autre part, soit $(x_n, y_n) \in D$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in D \Rightarrow x_n^2 - y_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}^2 - \bar{y} = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in D, \text{ donc } D \text{ est fermé.}$$

Le problème (1) admet au moins une solution globale.

2. Soit $\gamma > 0$.

(a) On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 + \frac{\gamma r^2}{2} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \right] = +\infty.$$

D'où φ_γ est coercive.

(b) Nous avons :

$$\nabla \varphi_\gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \gamma x(x^2 - y - 1) = 0, \\ 2y - \gamma(x^2 - y - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ où } 1 + \gamma(x^2 - y - 1) = 0, \\ 2y - \gamma(x^2 - y - 1) = 0. \end{cases}$$

D'où, les points sont : $\left(0, \frac{-\gamma}{2+\gamma}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}}, \frac{-1}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}}, \frac{-1}{2}\right)$.

(c) Nous avons :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{-\gamma}{2+\gamma} = -1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \pm \sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alors, on a :

$$1 = f(0, -1) < f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Donc, les points $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$ sont des solutions du problème (1).

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons f est continue sur D et $f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Alors, f est coercive. D'autre part, soit $(x_n, y_n) \in D$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in D \Rightarrow x_n^2 - y_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}^2 - \bar{y} = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in D, \text{ donc } D \text{ est fermé.}$$

Le problème (1) admet au moins une solution globale.

2. Soit $\gamma > 0$.

(a) On pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 + \frac{\gamma r^2}{2} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \right] = +\infty.$$

D'où φ_γ est coercive.

(b) Nous avons :

$$\nabla \varphi_\gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \gamma x(x^2 + y - 1) = 0, \\ 2y + \gamma(x^2 + y - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ où } 1 + \gamma(x^2 + y - 1) = 0, \\ 2y + \gamma(x^2 + y - 1) = 0. \end{cases}$$

D'où, les points sont : $\left(0, \frac{\gamma}{2+\gamma}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Nous avons :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{2+\gamma} = 1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \pm \sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alors, on a :

$$1 = f(0, 1) < f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Donc, les points $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ sont des solutions du problème (3).