



Exercice 1 (07 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x + y, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

1. Montrer que le problème (1) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

où $h(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.

- (a) Montrer que le problème (2) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .
- (b) Écrire la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2).
- (c) Montrer que x_γ^* vérifiant l'équation algébrique d'ordre trois suivante :

$$4\gamma (x_\gamma^*)^3 - 4\gamma x_\gamma^* + 1 = 0.$$

- (d) En déduire la solution du problème (1).

Exercice 2 (07 pts). Soit (P) le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 - 4(x + y) + 8 \\ x + y = 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min \Phi_k(x, y) = f(x, y) + k \left[(h(x, y))^2 + (g^+(x, y))^2 \right] \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $h(x, y) = x + y - 2$, $g(x, y) = y - x$, $g^+(x, y) = \max\{0, g(x, y)\}$. On admettra que la fonction $\Phi_k(x, y)$ est strictement convexe. On rappelle que le gradient de $(g^+)^2$ sont donnés par $\nabla (g^+)^2 = 2g^+ \nabla g$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) .
2. En supposant que $y > x$. Donner (x_k, y_k) la solution du problème (P_k) en fonction de k .
3. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $x_k + y_k \neq 2$ et $y_k - x_k = 0$.
4. Déduire la solution du problème (P) .
5. On considère l'approximation des vecteurs de multiplicateur de K.K.T et de Lagrange tels que

$$\lambda_k = 2kh(x_k, y_k) \text{ et } \mu_k = 2kg^+(x_k, y_k).$$

- (a) Calculer λ_k et μ_k .
- (b) Déduire les multiplicateurs de K.K.T et de Lagrange associés aux contraintes $h(x, y) = 0$ et $g(x, y) \leq 0$.

Exercice 3 (06 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \min \psi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x - 6z, \\ (x, y, z) \in \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 6\}$. On suppose que le problème (Q) admet une solution unique.

1. Donner la condition de Lagrange associée au problème (Q) .
2. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q) qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n, y_n, z_n)^T$ et le multiplicateur de Lagrange λ_n avec $\rho > 0$ un pas fixe.
3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{n+1} = \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right) \lambda_n - \rho.$$

4. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{5}.$$

5. Si $0 < \rho < 1$, calculer la solution du problème (Q) .