



Exercice 1 (10 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2y, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$.

1. Montrer que le problème (1) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \frac{\gamma}{2} (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

où $h(x, y) = x + y - 2$.

- (a) Montrer que le problème (2) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .
- (b) Écrire la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2).
- (c) Résoudre le problème (2).
- (d) En déduire la solution du problème (1).

Exercice 2 (10 pts). Soit (P) le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - x \\ x + y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min \Phi_k(x, y) = f(x, y) + k \left[(g_1^+(x, y))^2 + (g_2^+(x, y))^2 \right] \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = 1 - x$, $g_1^+(x, y) = \max\{0, g_1(x, y)\}$ et $g_2^+(x, y) = \max\{0, g_2(x, y)\}$. On admettra que la fonction $\Phi_k(x, y)$ est strictement convexe. On rappelle que les gradients de $(g_1^+)^2$ et $(g_2^+)^2$ sont donnés par $\nabla (g_1^+)^2 = 2g_1^+ \nabla g_1$ et $\nabla (g_2^+)^2 = 2g_2^+ \nabla g_2$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) .
2. En supposant que $x + y > 0$ et $1 - x > 0$, donner (x_k, y_k) la solution du problème (P_k) en fonction de k .
3. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $x_k + y_k > 0$ et $1 - x_k > 0$.
4. En déduire une solution du problème (P) .
5. On considère l'approximation du vecteur des multiplicateurs de K.K.T tels que

$$\mu_k^1 = 2kg_1^+(x_k, y_k) \text{ et } \mu_k^2 = 2kg_2^+(x_k, y_k).$$

(a) Calculer μ_k^1 et μ_k^2 .

(b) En déduire les multiplicateurs de K.K.T associés aux contraintes $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$.