Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Master : AMN, Semestre : 2

Examen final : Méthodes numériques pour l'optimisation avec contraintes

Durée :1h :30, Année universitaire : 2023/2024

Exercice 1 (10 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x,y) = x^2 + y^2, \\ (x,y) \in D, \end{cases} \tag{1}$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 2\}$.

1. Montrer que le problème (1) admet au moins une solution global.
2. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x,y) = f(x,y) + \frac{\gamma}{2}(h(x,y))^2, \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2}$$

   où $h(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2$.

   (a) Montrer que le problème (2) admet au moins une solution global.

   (b) Écrire la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2).

   (c) Résoudre le problème (2).

   (d) Déduire les solutions du problème (1).

Exercice 2 (10 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min q_k(x,y) = f(x,y) + \gamma_k (g^+(x,y))^2 \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec $g(x,y) = 1 - x - y$ et la suite $\gamma_k > 0$ et $\gamma_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$, et

$$g^+(x,y) = \max\{0, g(x,y)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x,y) \leq 0, \\ g(x,y) & \text{si } g(x,y) > 0, \end{cases}$$

On note (x_k, y_k) la solution de problème (P_k). On admettra que la fonction $q_k(x,y)$ est convexe. On rappelle que le gradient de $(g^+)^2$ est donné par $\nabla (g^+)^2 = 2g^+ \nabla g$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k).
2. Calculer la solution du problème (P_k) pour $\gamma_k = k$.
3. Déduire la solution du problème (P).
4. On considère l'approximation du multiplicateur de KKT $\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k)$.

   (a) Calculer μ_k.

   (b) En déduire le multiplicateur de KKT associé à la contrainte $g(x,y) \leq 0$.