

Exercice 1 (05 pts). On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T A x, \\ \|x\|^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Où A est une matrice symétrique et définie positive. Soit (x_k) la suite de la méthode du gradient projeté à pas fixe définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathcal{C}, \\ x_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

où $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = 1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$ et $\alpha > 0$ un pas fixe.

1. Exprimer x_{k+1} en fonction de x_k , A et α .
2. Si $0 < \alpha < 1/\lambda_{\max}$ (où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de la matrice A), Montrer que l'algorithme (2) est converge vers une solution optimale, à condition que x_0 ne soit pas orthogonal aux vecteurs propres de A correspondant à la plus petite valeur propre.

Exercice 2 (08 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (3)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x = 0\}$.

1. Montrer que f est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que le problème (3) admet une solution unique.
3. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_{\gamma}(x, y) = f(x, y) + \gamma (h(x, y))^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4)$$

où $h(x, y) = y + x$.

- (a) Montrer que le problème (4) admet une solution unique.
- (b) Résoudre le problème (4) par la méthode de pénalité.
- (c) Dédire la solution du problème (3).

Exercice 3 (07 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min \psi(x, y) = x^2 + (y - 1)^2, \\ (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. On suppose que le problème (P) admet une solution unique.

1. Donner la condition de Lagrange associée au problème (P) .
2. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n, y_n)^T$ et le multiplicateur de Lagrange λ_n avec $\rho > 0$ un pas fixe.
3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = (1 - \rho)^n (\lambda_0 - 1) + 1.$$

4. Si $0 < \rho < 1$, calculer la solution du problème (P) .