



Important : Pour voir la correction de l'examen, veuillez scanner l'image à droite du papier une fois l'examen terminé.

Exercice 1 (06 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle - \langle c, x \rangle \\ x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où Q est une matrice carré d'ordre n symétrique et définie positive, $c \in \mathbb{R}^n$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ et A est une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m < n$ et $\text{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$. Soit (x^k) la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal définie par :

$$\begin{cases} x^0 \in \Omega, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)] = x^k - \alpha_k P \nabla f(x^k), \forall k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_k \text{ est le point de minimum global de la fonction } \varphi(\alpha) = f[x^k - \alpha P \nabla f(x^k)]. \end{cases}$$

où $P = I - A^T (AA^T)^{-1} A$.

1. Montrer que la suite (x^k) donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k,$$

où $g_k = \nabla f(x^k) = Qx^k - c$.

2. Montrer que $g_{k+1}^T P g_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que le vecteur $x^{k+1} - x^k$ est orthogonal sur le vecteur $x^{k+2} - x^{k+1}$.

Exercice 2 (07 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2y, \\ (x, y) \in D, \end{cases} \quad (2)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$.

1. Montrer que f est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que le problème (2) admet une solution unique.

3. Pour tout $\gamma > 0$, on considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi_\gamma(x, y) = f(x, y) + \gamma(x + y - 2)^2, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3)$$

(a) Montrer que le problème (3) admet une solution unique.

(b) Résoudre le problème (3) par la méthode de pénalité.

Exercice 3 (07 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min \psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4, \\ (x, y, z) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$. On suppose que le problème (P) admet une solution unique.

1. Donner la condition de Lagrange associée au problème (P).

2. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (P) qui permet de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n, y_n, z_n)^T$ et le multiplicateur de Lagrange λ_n avec $\rho > 0$ un pas fixe.

3. Montrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{n+1} = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right) \lambda_n - 2\rho.$$

4. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \left(1 - \frac{3\rho}{2}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{3}.$$

5. Si $0 < \rho < 2/3$, déduire la solution du problème (P).