

Exercice 1 (4 pts). Soient Ω un sous-ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi(y) = \|y - x\|^2 \\ y \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que le problème (1) admet une solution unique notée par $z = \mathcal{P}_\Omega(x)$ où $\mathcal{P}_\Omega$ est l'opérateur de projection orthogonale de x sur Ω .
2. Montrer l'inégalité suivante :

$$(x - z)^T (y - z) \leq 0, \text{ pour tout } y \in \Omega.$$

Exercice 2 (10 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) = y \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} \min q_k(x, y) = y + \gamma_k (g^+(x, y))^2 \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et la suite $\gamma_k > 0$ et $\gamma_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et

$$g^+(x, y) = \max\{0, g(x, y)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x, y) \leq 0, \\ g(x, y) & \text{si } g(x, y) > 0, \end{cases}$$

On note (x_k, y_k) la solution de problème (P_k) . On admettra que la fonction $q_k(x, y)$ est convexe. On rappelle que le gradient de $(g^+)^2$ est donné par $\nabla (g^+)^2 = 2g^+ \nabla g$.

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) .
2. Montrer que $x_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. On considère maintenant $\gamma_k = \frac{1/4}{\frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k}}$ avec $k \geq 2$.
 - (a) Écrire l'équation permettant de trouver la deuxième coordonnées y_k . Cette équation admet trois racines.
 - (b) Calculer ces racines. Indication : on remarquera que l'équation admet $\frac{1}{k^{1/3}}$ comme racine évidente.
 - (c) Laquelle des trois racines précédentes est valide ?
 - (d) En déduire la solution du problème (P) .
 - (e) On considère l'approximation du multiplicateur de KKT $\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k)$.
 - i. Calculer μ_k .
 - ii. En déduire le multiplicateur de KKT associé à la contrainte $g(x, y) \leq 0$.

Exercice 3 (6 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

1. Montrer que le problème (Q) possède une unique solution.
2. Donner la fonction de Lagrange associé au problème (Q) .
3. Écrire l'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q) .
4. Avec un pas $\rho = 1$, calculer la solution du problème (Q) .

Corrigé d'exercice 1: 1. On note $A = I$ matrice unitaire d'ordre 1. Alors, nous avons :

$$\varphi(y) = \|Ay - x\|^2 = 2y^T Ay - 2x^T Ay + \|x\|^2$$

est une fonction quadratique strictement convexe car A est définie positive. D'autre part, on a :

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} \varphi(y) = +\infty.$$

D'où φ est coercive. Donc, le problème (1) admet une solution unique.

2. Par convexité de Ω , nous avons :

$$\forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)z + \lambda y = z + \lambda(y - z) \in \Omega,$$

donc, on a :

$$\varphi(z + \lambda(y - z)) - \varphi(z) \geq 0.$$

On divise ensuite par $\lambda > 0$ et on fait tendre λ tend vers 0^+ , on obtient :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(z + \lambda(y - z)) - \varphi(z)}{\lambda} = \langle \nabla \varphi(z), y - z \rangle \geq 0.$$

Mais, $\nabla \varphi(z) = 2(z - x)$. Donc, $\langle x - z, y - z \rangle = (x - z)^T (y - z) \leq 0$.

Corrigé d'exercice 2: 1. La condition nécessaire est suffisante du premier ordre est donnée par :

$$\nabla q_k(x_k, y_k) = \nabla f(x_k, y_k) + 2\gamma_k g^+(x_k, y_k) \nabla g(x_k, y_k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_k g^+(x_k, y_k) x_k = 0, \\ 1 + 4\gamma_k g^+(x_k, y_k) y_k = 0. \end{cases} \quad (2)$$

2. Nous avons :

- Si $g^+(x_k, y_k) = 0$, alors la deuxième équation de (2) devient $1 = 0$, ce qui est impossible.
- Si $g^+(x_k, y_k) = g(x_k, y_k) > 0$, alors la première équation de (2) devient :

$$\gamma_k g(x_k, y_k) x_k = 0 \Rightarrow x_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Soit $\gamma_k = \frac{1/4}{k^{1/3} - \frac{1}{k}}$ avec $k \geq 2$.

(a) Le deuxième équation de (1) devient : $1 + \frac{1}{k^{-1/3} - k^{-1}} (y_k^2 - 1) y_k = 0$. Soit encore

$$y_k^3 - y_k + \frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k} = 0. \quad (3)$$

On voit bien que $y_k = \frac{1}{k^{1/3}}$, alors $y_k^3 = \frac{1}{k}$ et que $\frac{1}{k^{1/3}}$ est une racine de l'équation (3).

(b) L'équation (3) se met donc sous la forme (on remplace y_k par y pour alléger)

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{1}{k^{1/3}}\right) (y^2 + \alpha y + \beta) &= y^3 + \alpha y^2 + \beta - \frac{y^2}{k^{1/3}} - \frac{\alpha y}{k^{1/3}} - \frac{\beta}{k^{1/3}} \\ &= y^3 + \left(\alpha - \frac{1}{k^{1/3}}\right) y^2 + \left(\beta - \frac{\alpha}{k^{1/3}}\right) y - \frac{\beta}{k^{1/3}}, \end{aligned}$$

donc, on a :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{k^{1/3}}, \\ \beta - \frac{\alpha}{k^{1/3}} = -1, \\ -\frac{\beta}{k^{1/3}} = \frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{k^{1/3}}, \\ \beta = -1 + \frac{1}{k^{2/3}} \end{cases}$$

On résoudre l'équation du second ordre suivante :

$$y^2 + \frac{y}{k^{1/3}} + \frac{1}{k^{2/3}} - 1 = 0. \quad (4)$$

Nous avons : $\Delta = \frac{1}{k^{2/3}} - 4 \left(\frac{1}{k^{2/3}} - 1 \right) = 4 - \frac{3}{k^{2/3}} > 0$ pour tout $k \geq 2$. L'équation (4) admet deux racines différentes :

$$y = \frac{\frac{-1}{k^{1/3}} \pm \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}{2}$$

(c) Nous devons avoir $g^+(x_k, y_k) > 0$ c'est à dire $g(x_k, y_k) > 0$. Nous avons :

– Pour $x_k = 0$ et $y_k = \frac{1}{k^{1/3}}$, donc $g(x_1, y_1) = x_k^2 + y_k^2 - 1 > 0$ devient $\frac{1}{k^{2/3}} > 1$, ce qui est faux.

– Pour $x_k = 0$ et $y_k = \frac{\frac{-1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}{2}$, alors $x_k^2 + y_k^2$ devient :

$$\frac{1}{4} \left[-\frac{1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right]^2 \geq \frac{1}{4} (\sqrt{4})^2 = 1, \text{ donc } x_k^2 + y_k^2 > 1 \text{ est faux.}$$

– Pour $x_k = 0$ et $y_k = \frac{\frac{-1}{k^{1/3}} - \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}{2}$, alors $x_k^2 + y_k^2$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right]^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k^{2/3}} + 4 - \frac{3}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}} \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[4 - \frac{2}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}} \underbrace{\sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}_{>1, (k \geq 2)} \right] \\ &> \frac{1}{4} \left[4 - \underbrace{\frac{2}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}}}_{>0 (k \geq 2)} \right] > 1 \end{aligned}$$

Donc, racine valide est $(x_k, y_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{k^{1/3}} - \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right)$ converge vers la limite $(0, -1)$.

(d) La solution du problème (P) est $(0, -1)$.

(e) Soit l'approximation du multiplicateur de KKT $\mu_k = 2\gamma_k g^+(x_k, y_k)$. Nous avons :

$$\text{i. } \mu_k = 2 \frac{1/4}{k^{-1/3} - k^{-1}} \left[\frac{1}{4} \left(4 - \frac{2}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}} \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right) - 1 \right] = \frac{1/4}{k^{-1/3} - k^{-1}} \left[-\frac{1}{k^{2/3}} + \frac{1}{k^{1/3}} \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right]$$

ii. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1/4}{k^{-1/3} - k^{-1}} \left[-\frac{1}{k^{2/3}} + \frac{1}{k^{1/3}} \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{k^{1/3} - k^{-1/3}} + \frac{1}{1 - k^{-2/3}} \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Corrigé d'exercice 3: 1. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$, donc f est coercive et C

est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ fermé et convexe. D'autre part, la matrice hessienne de f est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

D'où f est strictement convexe. Le problème (Q) admet une solution unique.

2. La fonction de Lagrange associée au problème (Q) est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

3. L'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q) est donné par :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathcal{C}, \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \rho > 0, \\ \nabla f(x_k, y_k) + \lambda_k \nabla h(x_k, y_k) = 0, \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho h(x_k, y_k) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathcal{C}, \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \rho > 0, \\ 2x_k + \lambda_k = 0, \\ 2y_k + \lambda_k = 0, \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(x_k + y_k - 1). \end{cases} \quad (5)$$

4. Avec l'algorithme de Uzawa (5), on obtient :

$$x_k = y_k = -\frac{\lambda_k}{2} \text{ et } \lambda_{k+1} = (1 - \rho) \lambda_k - \rho.$$

Si $\rho = 1$, alors $\lambda_{k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, nous avons :

$$x_k = y_k = \frac{1}{2},$$

d'où $(1/2, 1/2)$ est la solution du problème (Q) .