

Exercice 1 (12 pts). On considère le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T A x \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n , symétrique et définie positive et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 2\}$.

Nous appliquons à ce problème l'algorithme de gradient projeté à pas fixe suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha \nabla f(x^k)], \end{cases} \quad (2)$$

où $\alpha > 0$ et $\mathcal{P}_\Omega$ est l'opérateur orthogonal de projection sur Ω .

1. Écrire $\mathcal{P}_\Omega(x)$ en fonction de x .
2. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Résoudre le problème (1).
- (b) Soit $y^k = x_1^k/x_2^k$. Montrer que (y^k) est une suite géométrique.
- (c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Montrer que la suite (x^k) définie par (2) converge vers une solution optimale de problème (1).

Exercice 2 (8 pts). Avec la méthode de pénalité, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Indication : utiliser la fonction de pénalité quadratique suivante :

$$P(x) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2 - 1)^2.$$

Corrigé d'exercice 1: 1. L'opérateur de projection orthogonal $\mathcal{P}_\Omega$ est donné par :

$$\mathcal{P}_\Omega(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \Omega, \\ \frac{2x}{\|x\|} & \text{si } x \notin \Omega, x \neq 0. \end{cases}$$

2. Soit $x = (x_1, x_2)^T$. Nous avons :

(a) La fonction de Lagrange de (1) est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda (\|x\|^2 - 4) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda (x_1^2 + x_2^2 - 4),$$

d'où la condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ x_2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda) x_1 = 0, \\ (1 + 2\lambda) x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases}$$

i. Si $\lambda = -1$, alors $x_2 = 0$ et $x_1 = \pm 2$, les points sont $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.

ii. Si $\lambda = -1/2$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 = \pm 2$, les points sont $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

D'autre part, nous avons :

$$2 = f(0, 2) = f(0, -2) < f(2, 0) = f(-2, 0) = 4,$$

d'où $(0, 2)$ et $(0, -2)$ sont solutions optimales de (1).

(b) On pose $x^k = (x_1^k, x_2^k)^T$. Nous avons :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x^k - \alpha \nabla f(x^k)] = 2 \frac{x^k + \alpha \nabla f(x^k)}{\|x^k + \alpha \nabla f(x^k)\|} = 2\beta_k (I - \alpha A) x^k,$$

où $\beta_k = 1 / \|(I - \alpha A) x^k\|$. Dans le cas particulier de A , nous avons :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 2\beta_k (1 - 2\alpha) x_1^k, \\ x_2^{k+1} = 2\beta_k (1 - \alpha) x_2^k. \end{cases} \Rightarrow y^{k+1} = \frac{x_1^{k+1}}{x_2^{k+1}} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right) y^k.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\frac{y^{k+1}}{y^k} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right) \Rightarrow (y^k) \text{ est une suite géométrique.}$$

(c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, y^k = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} \right)^k y^0.$$

D'où, $\alpha > 0$ et $(1 - 2\alpha) / (1 - \alpha) < 1$, donc $y^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} 2 = \|x^k\| &= \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2} \\ &= |x_2^k| \sqrt{1 + (y^k)^2}, \end{aligned}$$

D'où,

$$|x_2^k| = \frac{2}{\sqrt{1 + (y^k)^2}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 2.$$

c'est à dire

$$x_2^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 2 \quad \text{ou} \quad x_2^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -2.$$

Alors,

$$y^k = \frac{x_1^k}{x_2^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow x_1^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'où, la suite converge vers $(0, 2)$ ou $(0, -2)$ solutions optimales du problème (1).

Corrigé d'exercice 2: Nous avons :

$$q(\gamma, x) = f(x) + \frac{\gamma}{2}P(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{\gamma}{2}(x_1 - x_2 - 1)^2.$$

Alors, on a :

$$\nabla q(\gamma, x) = \begin{bmatrix} (4 + \gamma)x_1 - \gamma x_2 - \gamma \\ -\gamma x_1 + (2 + \gamma)x_2 + \gamma \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 q(\gamma, x) = \begin{bmatrix} 4 + \gamma & -\gamma \\ -\gamma & 2 + \gamma \end{bmatrix}$$

Donc, nous avons :

$$\nabla q(\gamma, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\gamma}{3\gamma + 4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\gamma}{3\gamma + 4}.$$

D'autre part, on a :

$$\det [\nabla^2 q(\gamma, x)] = 6\gamma + 8 > 0 \quad \text{et} \quad \text{tr} [\nabla^2 q(\gamma, x)] = 2\gamma + 6 > 0.$$

D'où $\left(\frac{\gamma}{3\gamma+4}, \frac{-2\gamma}{3\gamma+4}\right)$ est un point de minimum local strict de q . Mais la matrice hessienne de q est définie positive sur $\mathbb{R}^2$, donc q est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. le point $\left(\frac{\gamma}{3\gamma+4}, \frac{-2\gamma}{3\gamma+4}\right)$ est point de minimum global de q sur $\mathbb{R}^2$. Finalement, nous avons :

$$x_1^* = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{3\gamma + 4} = 1/3 \quad \text{et} \quad x_2^* = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{-2\gamma}{3\gamma + 4} = -2/3.$$

D'où $x^* = (1/3, -2/3)$.