

Corrigé d'exercice 1:

Alors, nous avons

1. La fonction f est continue sur D . Soit $(x_n, y_n) \in D$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$.
 $(x_n, y_n) \in D \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in D$.

D'où D est fermé.

Pour tout $(x, y) \in D$, nous avons :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2},$$

d'où D est borné. D'après théorème de Weierstrass, le problème (1) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Soit $\gamma > 0$.

(a) On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[\frac{\cos \theta + \sin \theta}{r} + \frac{\gamma r^2}{2} \left(1 - \frac{2}{r^2} \right) \right]^2 = +\infty,$$

d'où φ_γ est coercive et continue. Alors, le problème (2) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .

(b) La condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2) est donné par :

$$\nabla \varphi_\gamma(x_\gamma, y_\gamma) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\gamma x_\gamma (x_\gamma^2 + y_\gamma^2 - 2) = 0, \\ 1 + 2\gamma y_\gamma (x_\gamma^2 + y_\gamma^2 - 2) = 0. \end{cases}$$

(c) Par la différence entre les deux équations dans (3), on obtient :

$$(x_\gamma - y_\gamma) (x_\gamma^2 + y_\gamma^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_\gamma = y_\gamma.$$

Pour $x_\gamma^2 + y_\gamma^2 = 2$ est impossible puisque dans (3) on trouve $1 = 0$.

En remplaçant dans (3) $x_\gamma = y_\gamma$, on obtient l'équation algébrique d'ordre trois suivante :

$$4\gamma x_\gamma^3 - 4\gamma x_\gamma + 1 = 0.$$

(d) Nous avons :

$$4\gamma x_\gamma^3 - 4\gamma x_\gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x_\gamma^3 - 4x_\gamma + \frac{1}{\gamma} = 0 \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} 4x^* ((x^*)^2 - 1) = 0.$$

— Si $x^* = 0$, alors impossible car le point $(0, 0)$ ne vérifie pas la contrainte du problème (1).

— Si $x^* = \pm 1$, alors les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ vérifient la contrainte du problème (1). Mais, $-2 = f(-1, -1) < f(1, 1) = 2$. Alors, le point $(-1, -1)$ est la solution du problème (1).

Corrigé d'exercice 2:

1. La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) :

$$\nabla \Phi_k(x, y) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x, y) + 2k [h(x, y) \nabla h(x, y) + g^+(x, y) g(x, y)] = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 + k[x + y - 2 - g^+(x, y)] = 0, \\ y - 2 + k[x + y - 2 + g^+(x, y)] = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. En supposant que $y > x$. Donc $g^+(x, y) = y - x$. La solution (x_k, y_k) du problème (P_k) vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x_k - 2 + k[x_k + y_k - 2 - g^+(x_k, y_k)] = 0, \\ y_k - 2 + k[x_k + y_k - 2 + g^+(x_k, y_k)] = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k - 2 + k[x_k + y_k - 2 - y_k + x_k] = 0, \\ y_k - 2 + k[x_k + y_k - 2 + y_k - x_k] = 0. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_k = \frac{2k+2}{2k+1}, \\ y_k = \frac{2k+2}{2k+1}. \end{cases}$$

3. Nous avons :

$$x_k + y_k - 2 = \frac{4 + 4k}{1 + 2k} - 2 = \frac{2}{1 + 2k} \neq 0, \quad y_k - x_k = 0$$

4. Nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 1.$$

Alors, la solution du problème (P) est le point $(1, 1)$.

5. Nous avons :

(a) $\lambda_k = 2kh(x_k, y_k) = \frac{4k}{1+2k}$ et $\mu_k = 2kg^+(x_k, y_k) = 0.$

(b) $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda^* = 2$ et $\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu^* = 0.$

Corrigé d'exercice 3:

1. On pose $h(x, y, z) = x + y + z - 6$. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda h(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x - 6z + \lambda(x + y + z - 6) \quad (0,5)$$

La condition de Lagrange associée au problème (Q) :

$$\begin{cases} 2x - 4 + \lambda = 0, \\ 4y + \lambda = 0, \\ 2z - 6 + \lambda = 0, \\ x + y + z = 6. \end{cases} \quad (1)$$

2. L'algorithme d'Uzawa associé au problème (Q) est donné par :

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) \in \Omega, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0, \\ \nabla f(x_n, y_n, z_n) + \lambda_n \nabla h(x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho h(x_n, y_n, z_n). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0, y_0, z_0) \in \Omega, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0, \\ 2x_n - 4 + \lambda_n = 0, \\ 4y_n + \lambda_n = 0, \\ 2z_n - 6 + \lambda_n = 0, \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho(x_n + y_n + z_n - 6). \end{cases} \quad (1) \quad (4)$$

3. Dans (4), en remplaçant x_n, y_n et z_n dans la dernière équation, on obtient :

$$\lambda_{n+1} = \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right) \lambda_n - \rho. \quad (0,5) \quad (5)$$

4. Pour $n = 0$, on trouve dans (5) $\lambda_0 = \lambda_0$. On suppose que (5) est vérifiée pour n . D'après (5), nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right) \lambda_n - \rho = \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right) \left[\left(1 - \frac{5\rho}{4}\right)^n \left(\lambda_0 + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{5} \right] - \rho \\ &= \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right)^{n+1} \left(\lambda_0 + \frac{4}{5}\right) - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right) - \rho \\ &= \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right)^{n+1} \left(\lambda_0 + \frac{4}{5}\right) - \rho. \quad (1) \end{aligned}$$

5. Nous avons :

$$0 < \rho < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < 1 - \frac{5\rho}{4} < 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{5\rho}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (0,5)$$

Donc, on a :

$$\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{5}, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{5}, \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{17}{5}. \quad (0,25) \quad (0,25) \quad (0,25) \quad (0,25)$$

Alors, la solution du problème (Q) est le point $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

(0,5)