Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Master : Analyse mathématique et numérique

Examen final : Méthodes numériques pour l'optimisation avec contraintes

Correction type

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty \Longrightarrow f \text{ est coercive.}$$

D'autre part, soit $(x_k, y_k) \in D$ telle que $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors,

$$\begin{aligned}(x_k, y_k) \in D &\Rightarrow x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2 = 2,\\ &\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 = 2,\\ &\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in D,\end{aligned}$$

02

d'où, D est fermé. Alors, le problème (1) admet au moins une solution global.

2. Soit $\gamma > 0$ et $h(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2$.
   (a) On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Nous avons :

   02

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \varphi_\gamma(x,y) = \lim_{r\to+\infty} r^2\left[1 + \gamma\left(1 + \sin 2\theta - \frac{2}{r^2}\right)\right] = +\infty \Rightarrow \varphi_\gamma \text{ est coercive.}$$

   Alors, le problème (2) admet au moins une solution global.

   (b) La condition nécessaire d'optimalité de premier ordre du problème (2) :

$$\begin{cases} x + 2\gamma\left(x^2 + 2xy + y^2 - 2\right)(x+y) = 0, \\ y + 2\gamma\left(x^2 + 2xy + y^2 - 2\right)(x+y) = 0. \end{cases}$$

   02

   (c) Les solutions du problème (2) sont $\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}, -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16\gamma}}\right)$. 02

   (d) Les solutions du problème (1) sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

   02

Corrigé d'exercice 2:

1. La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ... problème (P_k) :

$$\begin{cases} 3x_k - \gamma_k g^+ (x_k, y_k) = 0, \\ 2y_k - \gamma_k g^+ (x_k, y_k) = 0. \end{cases}$$

02

2. On pose $\gamma_k = k$.
   — Si $g^+ (x_k, y_k) = 0$, alors $x_k = y_k$ (impossible).
   — Si $g^+ (x_k, y_k) = g (x_k, y_k) > 0$, nous avons :

$$\begin{cases} 3x_k - k (1 - x_k - y_k) = 0, \\ 2y_k - k (1 - x_k - y_k) = 0. \end{cases} \Rightarrow y_k = \frac{3}{2} x_k.$$

02

   Alors, $x_k = \frac{2k}{3+5k}$ et $y_k = \frac{3k}{3+5k}$.

3. Nous avons : $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{2}{5}$ et $y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{3}{5}$. 02

4. On pose $\mu_k = 2\gamma_k g^+ (x_k, y_k)$.
   (a) Nous avons :

$$\mu_k = 2\gamma_k g^+ (x_k, y_k) = 2k (1 - x_k - y_k) = \frac{6k}{3 + 5k}.$$

02

   (b) Nous avons : $\mu_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{6}{5}$. 02