

Corrigé d'exercice 1:

1. On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 + \sin \theta \cos \theta - \frac{2 \sin \theta}{r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 + \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{2 \sin \theta}{r} \right) = +\infty, \quad (1) \end{aligned}$$

d'où f est coercive. D'autre part, soit $(x_n, y_n) \in D$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors,

$$(x_n, y_n) \in D \Rightarrow x_n + y_n = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} + \bar{y} = 2, \quad (1)$$

d'où D est fermé. Donc, le problème (1) admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Soit $\gamma > 0$. Nous avons :

(a) On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on a :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_\gamma(x,y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 + \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{2 \sin \theta}{r} + \gamma \left(\cos \theta + \sin \theta - \frac{2}{r} \right)^2 \right] = +\infty, \quad (1)$$

d'où $\varphi_\gamma(x,y)$ est coercive. Donc, le problème (2) admet au moins une solution globale notée par (x_γ^*, y_γ^*) .

(b) La condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2) est donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_\gamma(x_\gamma^*, y_\gamma^*) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_\gamma^* + y_\gamma^* + \gamma(x_\gamma^* + y_\gamma^* - 2) = 0, \\ 2y_\gamma^* + x_\gamma^* - 2 + \gamma(x_\gamma^* + y_\gamma^* - 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \gamma)x_\gamma^* + (1 + \gamma)y_\gamma^* = 2\gamma, \\ (1 + \gamma)x_\gamma^* + (2 + \gamma)y_\gamma^* = 2 + 2\gamma. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

(c) Nous avons :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 + \gamma & 1 + \gamma \\ 1 + \gamma & 2 + \gamma \end{vmatrix} = 3 + 2\gamma \neq 0. \quad (1)$$

et

$$x_\gamma^* = \frac{\begin{vmatrix} 2\gamma & 1 + \gamma \\ 2 + 2\gamma & 2 + \gamma \end{vmatrix}}{3 + 2\gamma} = \frac{-2}{3 + 2\gamma}; \quad y_\gamma^* = \frac{\begin{vmatrix} 2 + \gamma & 2\gamma \\ 1 + \gamma & 2 + 2\gamma \end{vmatrix}}{3 + 2\gamma} = \frac{4 + 4\gamma}{3 + 2\gamma}. \quad (2)$$

(d) Nous avons :

$$x_\gamma^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^* = 0; \quad y_\gamma^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y^* = 2, \quad (1)$$

alors, $(0, 2)$ est une solution globale du problème (1).

Corrigé d'exercice 2:

1. La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre du problème (P_k) est donnée par :

$$\nabla \Phi_k(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y - 1 + 2k [g_1^+(x, y) - g_2^+(x, y)] = 0, \\ 2y + x + 2kg_1^+(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. En supposant que $x + y > 0$ et $1 - x > 0$. Alors, on a :

$$g_1^+(x, y) = g_1(x, y) = x + y \text{ et } g_2^+(x, y) = g_2(x, y) = 1 - x,$$

donc,

$$\begin{cases} 6x + y - 1 + 2k[2x + y - 1] = 0, \\ 2y + x + 2k(x + y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6 + 4k)x + (1 + 2k)y = 1 + 2k, \\ (1 + 2k)x + (2 + 2k)y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Nous avons :

$$\det = \begin{vmatrix} 6 + 4k & 1 + 2k \\ 1 + 2k & 2 + 2k \end{vmatrix} = 4k^2 + 16k + 13 \neq 0, \quad (1)$$

et

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 2k & 1 + 2k \\ 0 & 2 + 2k \end{vmatrix}}{4k^2 + 16k + 13} = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13}, \quad (1)$$

et

$$y_k = \frac{\begin{vmatrix} 6 + 4k & 1 + 2k \\ 1 + 2k & 0 \end{vmatrix}}{4k^2 + 16k + 13} = -\frac{4k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 16k + 13} \quad (1)$$

3. Nous avons :

$$x_k + y_k = \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13} - \frac{4k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 16k + 13} = \frac{2k + 12}{4k^2 + 16k + 13} > 0 \quad (1)$$

et

$$1 - x_k = 1 - \frac{4k^2 + 6k + 2}{4k^2 + 16k + 13} > 0. \quad (1)$$

4. Nous avons :

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (1, -1), \quad (1)$$

d'où $(1, -1)$ est une solution du problème (P) .

5. Nous avons :

$$(a) \mu_k^1 = 2kg_1^+(x, y) = \frac{2k(2k+12)}{4k^2+16k+13} \text{ et } \mu_k^2 = 2kg_2^+(x_k, y_k) = \frac{2k(10k+11)}{4k^2+16k+13}. \quad (0,5) \quad (0,5)$$

(b) Nous avons :

$$\mu_k^1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu_1 = 1 \text{ et } \mu_k^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu_2 = 5. \quad (0,5) \quad (0,5)$$