

Teste "rapide"

Ex 1 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 9x^2 & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 0 & \text{si } x > 1/3 \end{cases}$$

paire

i) Calculer $\hat{f}$ (justifier la réponse)

ii) Déduire la valeur de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u - u \cos u}{u^3} \cdot \cos\left(\frac{3u}{2}\right) du.$$

Ex 2 Soient les deux expressions suivantes :

$$dg = x^2 y^2 dx + x^3 y dy ; \quad dh = x^2 y^2 dx + b(x, y) dy.$$

1) Est-ce que $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existe ?

2) Trouver $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^2 v) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y v).$$

3) Trouver $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existe.

Ex 2

$$f(x) = \begin{cases} 1-9x^2 & 0 < x < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(1)

i) $\hat{f}(x) = 2 \int_0^{1/3} \cos(2\pi x \xi) (1-9\xi^2) d\xi$

$$= \frac{2 \times 18}{2\pi\zeta} \int_0^{1/3} \xi \sin 2\pi x \xi d\xi$$

$$1-9\xi^2 \rightarrow -18\xi$$

$$\cos 2\pi x \xi \rightarrow \frac{1}{2\pi\zeta} \sin 2\pi x \xi$$

$$= \frac{2 \times 18}{2\pi\zeta} \left[-\frac{1}{6\pi\zeta} \cos \frac{2\pi}{3}\zeta + \frac{1}{2\pi\zeta} \int_0^{1/3} \cos 2\pi x \xi d\xi \right] \quad \begin{matrix} x \rightarrow 1 \\ \sin 2\pi x \xi \rightarrow \frac{-1}{\cos} \cos 2\pi x \xi \end{matrix}$$

$$= \frac{18}{2(\pi\zeta)^2} \left[-\frac{1}{3} \cos \frac{2\pi}{3}\zeta + \frac{1}{\pi\zeta} \sin \frac{2\pi}{3}\zeta \right]$$

$$= \frac{18}{2(\pi\zeta)^2} \frac{\sin \frac{2\pi}{3}\zeta - \frac{2\pi\zeta}{3} \cos \frac{2\pi}{3}\zeta}{2\pi\zeta} = \frac{9}{2(\pi\zeta)^3} \left(\sin \frac{2\pi}{3}\zeta - \frac{2\pi}{3}\zeta \cos \frac{2\pi}{3}\zeta \right)$$

ii) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi x \xi \cdot \hat{f}(\xi) d\xi$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \cos(3u \cdot x) \frac{\ln u - u \ln u}{\left(\frac{3u}{2}\right)^3} du \quad \frac{2\pi}{3}\zeta = u$$

$$= \frac{2^3}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos 3ux \cdot \frac{\ln u - u \ln u}{u^3} du = f(x)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \frac{3u}{2} \cdot \frac{\ln u - u \ln u}{u^3} du = \frac{2\pi}{2^3} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{2^3} \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{-5\pi}{16}$$

Ex2 1) g n'existe pas, puisque

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^2) = 2x^2 y \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y) = 3x^2 y.$$

2) v est le facteur intégrant:

$$x^3 y \frac{\partial v}{\partial x} - x^2 y^2 \frac{\partial v}{\partial y} = v(2x^2 y - 3x^2 y) = -x^2 y v.$$

$$\text{s.e.} \quad \underbrace{\frac{dx}{x^3 y}}_{(1)} = - \underbrace{\frac{dy}{x^2 y^2}}_{(2)} = \frac{-dv}{x^2 y v}$$

$$(1): xy = c_1 \quad ; \quad (2): c_2 = yv$$

$$\Rightarrow v = \underline{\underline{\frac{1}{y} \varphi(xy)}}, \quad \forall \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$3) \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^2) = 2x^2 y = \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \quad \text{CNécessaire}$$

$$\Rightarrow b(x, y) = \frac{2}{3} x^3 y + \Theta(y)$$

$$\text{Calcul de } h: \quad h'_x = x^2 y^2 \quad h'_y = b(x, y)$$

$$\boxed{h(x, y) = \frac{x^3}{3} y^2 + \lambda(y)}$$

$$h'_y = b(x, y) = x^2 y$$