

TP1 : Méthode du gradient à pas fixe

Problème de Laplace

L'objectif de ce TP est d'utiliser la méthode du gradient à pas fixe pour calculer la solution du problème de Laplace suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

On se donne une subdivision de $[0, 1]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{1}{N+1}$, et on considère les points $x_i = ih$ de l'intervalle $[0, 1]$. On cherche alors une solution approchée sous la forme du vecteur $u_N = (u_i), i = 0, 1, \dots, N+1$, où les u_i vérifient le schéma aux différences finies :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Montrer que le problème (2) peut s'écrire sous la forme :

$$A_N u_N = F_N, \quad (3)$$

où A_N et F_N sont donnés par :

$$A_N = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_N = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que résoudre (3) revient à minimiser sur $\mathbb{R}^N$ la fonction J_N définie par :

$$J_N(u) = \frac{1}{2} \langle A_N u, u \rangle - \langle F_N, u \rangle. \quad (4)$$

3. Calculer ∇J_N en fonction de A_N et F_N .

Dans toute la suite du TP on prendra $f(x) = 1$.

Méthode du gradient à pas fixe

On rappelle l'algorithme du gradient à pas fixe pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un point de départ x^0 , un pas ρ et un test d'arrêt ε préalablement définis :

Algorithme du gradient à pas fixe :

Initialiser le résidu r^0 à 1 et le compteur k à 0.

Tant que le résidu est plus grand que ε et que le compteur n'est pas trop grand :

- calculer la descente $d^k = -\nabla f(x_k)$,
- poser $x^{k+1} = x^k + \rho d^k$,
- calculer le résidu $r^{k+1} = \|x^{k+1} - x^k\|$,
- incrémenter le compteur.

Créer un script **scriptTP1_fixe.m** pour répondre aux questions suivantes :

1. On se place dans le cas $N = 2$.
 - (a) Calculer J_2 et ∇J_2 . Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de J_2 ainsi que le champ de vecteurs ∇J_2 sur le pavé $[-10, 10]^2$.

Fonctions Matlab utiles : `contour`, `quiver`.
 - (b) Calculer les itérations $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ données par l'algorithme de gradient à pas fixe, et tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les x^k . On prendra $x^0 = (8, 4)$, $\rho = 0.1$ et $\varepsilon = 10^{-12}$.

Fonctions Matlab utiles : `hold on`, `plot`, `hold off`
2. On se place de nouveau dans le cas général.
 - (a) Ecrire une fonction **gradient_fixe.m** qui prend en argument A_N , F_N , un point de départ u^0 , un pas ρ et un test d'arrêt ε , et qui renvoie le vecteur u_N qui minimise J_N ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
 - (b) Tester cette fonction pour $\rho = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-12}$ et pour $N = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque N . Tracer sur une même figure les solutions approchées u_N , ainsi que la solution exacte de (1).
3. Reprendre la question 2.b. pour $\rho = 0.5$, puis $\rho = 1$. Que constate-t-on ? Peut-on choisir le pas ρ arbitrairement ?