

TP2 : Méthode du gradient à pas optimal

Résolution d'un problème aux limites

L'objectif de ce TP est d'utiliser la méthode du gradient à pas optimal pour calculer la solution approchée du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ce problème modélise la déformation d'un fil élastique fixe en ses extrémités sous la contrainte de force transversale $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et d'une rigidité $c \in \mathcal{C}([0, 1])$ avec $c(x) \geq c_0 > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Pour résoudre le problème (1), on se donne une subdivision régulière de $[0, 1]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{1}{N+1}$, et on considère les nœuds $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N+1$. On cherche alors une solution approchée aux nœuds $u_i \approx u(x_i)$ vérifiant le schéma aux différences finies :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Montrer que le problème (2) peut s'écrire sous la forme :

$$A_N u_N = F_N, \quad (3)$$

où A_N, U_N et F_N sont donnés par :

$$A_N = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2 c_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^2 c_2 & -1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 + h^2 c_{N-1} & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + h^2 c_N \end{pmatrix}, \quad U_N = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T,$$

$$\text{et } F_N = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T.$$

2. Montrer que : U_N est solution de (3) si et seulement si U_N minimise sur $\mathbb{R}^N$ la fonction J_N définie par :

$$J_N(u) = \frac{1}{2} \langle A_N u, u \rangle - \langle F_N, u \rangle.$$

3. Dans toute la suite du TP, on prendra $c(x) = 1$ et $f(x) = 1$. Montrer que la solution exacte du problème (1) donnée par :

$$u(x) = -e^x \frac{e^{-1} - 1}{e^{-1} - e} + e^{-x} \frac{e - 1}{e^{-1} - e} + 1. \quad (4)$$

4. Calculer ∇J_N en fonction de A_N et F_N .

Méthode du gradient à pas optimal

On rappelle l'algorithme du gradient à pas optimal pour une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, un point de départ u^0 et un test d'arrêt ε préalablement définis :

Algorithme du gradient à pas optimal :

Initialiser le résidu r^0 à 1 et le compteur k à 0.

Tant que le résidu est plus grand que ε et que le compteur n'est pas trop grand :

- Calculer le gradient $grad^k = \nabla f(x_k)$,
- Calculer $\rho_k \geq 0$ qui minimise la fonction $\rho \mapsto J_N(u^k - \rho grad^k)$
- Poser $u^{k+1} = u^k - \rho_k grad^k$,
- Calculer le résidu $r^{k+1} = \|x^{k+1} - x^k\|$,
- Incrémenter le compteur.

Créer un script **scriptTP2_optimal.m** pour répondre aux questions suivantes :

1. On se place dans le cas $N = 2$.
 - (a) Calculer J_2 et ∇J_2 . Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de J_2 ainsi que le champ de vecteurs ∇J_2 sur le pavé $[-10, 10]^2$.
Fonctions Matlab utiles : `contour`, `quiver`.
 - (b) Calculer les itérations $u^k = (u_1^k, u_2^k)$ données par l'algorithme de gradient à pas optimal, et tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les u^k . On prendra $u^0 = (8, 4)$ et $\epsilon = 10^{-12}$.
Fonctions Matlab utiles : `hold on`, `plot`, `hold off`
2. On se place de nouveau dans le cas général.
 - (a) Écrire une fonction **gradient_optimal.m** qui prend en argument A_N , F_N , un point de départ u^0 et un test d'arrêt ε , et qui renvoie le vecteur u_N qui minimise J_N ainsi que le nombre d'itérations effectuées et le temps de calcul.
 - (b) Tester cette fonction pour $\varepsilon = 10^{-12}$ et pour $N = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque N . Tracer sur une même figure les solutions approchées u_N , ainsi que la solution exacte de (1).