

Exercice 1. (Examen final : 2024/2025). Soit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f_\alpha(x, y) = x^2 + 2y^2 - \alpha xy + 3x - 4y,$$

où α est un paramètre réel, et soit $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}$. On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f_\alpha(x, y), \\ (x, y) \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1)$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
3. On suppose que $|\alpha| < 2\sqrt{2}$.
 - (a) Montrer que le problème (1) est un problème convexe.
 - (b) Calculer la solution globale du problème (1) en fonction de α .
4. On pose $\alpha = 3$.
 - (a) Montrer que la fonction f_α n'est pas coercive.
 - (b) Montrer que le problème (1) admet une solution locale stricte à déterminé.
5. On pose $\alpha = -3$.
 - (a) Écrire la condition de la Lagrange du problème (1).
 - (b) Montrer que le problème (1) n'admet aucune solution.

Exercice 2. (Examen final : 2020/2021). Soit $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $\varphi_\alpha(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha xy$ où α est un paramètre réel. On considère les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(1) : \begin{cases} \max \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \end{cases}, \quad (2) : \begin{cases} \min \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

où $\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$ et $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

1. Pour quelles valeurs de α , φ_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. On pose $\alpha = -2$.
 - (a) Montrer que la fonction φ n'est pas coercive.
 - (b) Montrer que le sous-ensemble Ω_1 n'est pas borné.
 - (c) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (1).
 - (d) Montrer que le problème (1) n'admet aucune solution.
3. On pose $\alpha = 2$.
 - (a) Montrer que le problème (2) est convexe.
 - (b) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (2).
 - (c) Résoudre le problème (2).
4. On pose $\alpha = 4\sqrt{2}/3$. Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(3) : \begin{cases} \min \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2. \end{cases}$$

- (a) Montrer que le problème (3) est équivalent le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(4) : \begin{cases} \min \phi_\alpha(x) = x^4 + \alpha x^3 + x^2 \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (b) Résoudre le problème (4).
- (c) Dédurre la solution du problème (3).