

Exercice 1. (Examen final, UMBM, 2021/2022). Soient $\varphi(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ et Ω_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha x \leq y^2, 0 < \alpha < 1\}.$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min \varphi(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \end{cases}$$

1. Avec le changement des variables $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, montrer que la fonction φ est coercive.
2. Montrer que Ω_1 est un sous-ensemble fermé.
3. Dédire que le problème (P) admet au moins un point de minimum global.
4. Calculer tous les points satisfaisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (P) .
5. Préciser les points de minimum global du problème (P) .
6. Avec la condition suffisante d'optimalité du second ordre, montrer que la fonction φ admet un point de maximum local strict sur Ω_1 .

Exercice 2. (Examen final, UMBM, 2017/2018). Une ville B est à 10 km à l'est d'une ville A et une ville C est à 3 km au nord de la ville B . Voir Figure 1.

On veut réaliser un projet d'autoroute entre les villes A et C . Le coût de 1 km d'autoroute le long de la route existante entre A et B est de 400000\$, alors que le coût de 1 km d'autoroute ailleurs est de 500000\$. On désire déterminer où doit se situer le point pivot P (c'est-à-dire, à quelle distance de A , l'autoroute doit bifurquer pour être construite en plein champ) pour minimiser le coût de réalisation de l'autoroute.

Enfin, on impose que la bifurcation ait lieu à au moins 3 km de l'entrée de la ville B , afin d'éviter qu'elle ne subisse une trop forte pollution au quotidien.

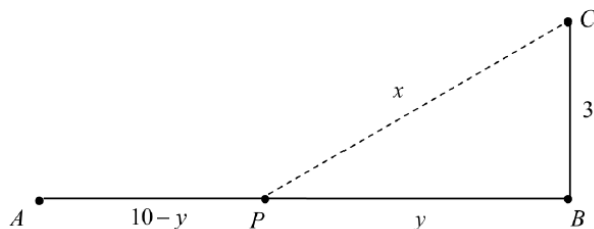


FIGURE 1 – Ville A , B et C .

1. Modéliser ce problème comme un problème de minimisation d'une fonction g des deux variables x et y avec l'ensemble des contraintes défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 3 \leq y \leq 10\}.$$

Où g et h sont des fonctions à déterminer.

2. Montrer que le sous-ensemble Ω est fermé et borné.
3. Dédire que ce problème admet une solution globale.
4. Montrer que tous les points de Ω sont réguliers.

5. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
6. Résoudre ce problème.
7. Déduire le coût optimal de l'autoroute.

Exercice 3. (Examen final, UMBM, 2019/2020). Un agriculteur produit du blé en utilisant un tracteur (qu'il conduit lui même, équivalent à 1000 heures de travail), du travail salarié en quantité x et des engrais en quantité y . Le prix d'une heure de travail est 1€ et le prix d'une unité d'engrais est 2€. La fonction de production de blé est donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ par :

$$\varphi(x, y) = \sqrt{(1000 + x)y}.$$

Supposons que l'agriculteur dispose d'une enveloppe d'une valeur $a > 0$. On considère l'ensemble des contraintes défini par :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + 2y \leq a\}$$

1. Montrer que le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max \varphi(x, y) \\ (x, y) \in C \end{cases} \quad (1)$$

admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Montrer que $y^* > 0$.
3. Calculer $\nabla \varphi(x^*, y^*)$.
4. Avec les conditions de KKT du problème (10), montrer qu'il existe $\mu \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = -2\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ \mu x^* = 0, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases}$$

5. Posons $a = 500$ €.
- (a) Montrer que (x^*, y^*) est un point régulier.
- (b) Résoudre le problème (10).
- (c) Déduire la quantité de blé produite.
6. Trouver la valeur minimale de a pour que l'agriculteur fasse appel à de la main d'œuvre.

Exercice 4. (Examen final, UMBM, 2022/2023). Soient $\varphi_a(x, y) = (1 - a)x^4 + (1 + a)y^4$ est une fonction avec a est un paramètre réel et Ω_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P3) : \begin{cases} \min \varphi_a(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a , la fonction φ_a est convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que Ω_1 est un sous-ensemble fermé.
3. On pose $a = 1/2$.
- (a) Avec les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, montrer que la fonction φ est coercive.
- (b) Déduire que le problème $(P3)$ admet au moins une solution.
- (c) Calculer tous les points satisfont les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème $(P3)$.

- (d) Préciser les solutions du problème (P3).
- (e) Avec la condition suffisante d'optimalité du second ordre, montrer que la fonction φ_a admet quatre points de maximum local strict sur Ω_1 .
4. Soit $a = 1$. On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P4) : \begin{cases} \min \varphi_a(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

où $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

- (a) Montrer que le problème (P4) est un problème convexe ?
- (b) Montrer que le problème (P4) admet infinité des solutions qu'il faut déterminer.

Exercice 5. (Examen final, UMBM, 2023/2024). Soient $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \min f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z - z_0)^2, \\ (x, y, z) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des contraintes donnés par :

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x + z = 1\}.$$

- Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ est convexe.
- Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème $(\mathcal{P})$. Sont-elles nécessaires ? suffisantes ?
- Soit $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^5$ un point qui satisfait les conditions KKT. Montrer que $y^* = 0$.
- On suppose que $\mu^* = 0$.
 - Exprimer x^*, z^* et λ^* en fonction de x_0 et z_0 .
 - À quelle condition sur x_0 et z_0 le point obtenu satisfait la contrainte d'inégalité ?
- On suppose que $\mu^* > 0$.
 - Montrer que $(x_0 + z_0 - 2\lambda^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2$.
 - Résoudre l'équation du second degré en λ^* obtenue à la question précédente pour obtenir les valeurs possibles de λ^* .
 - Calculer les valeurs associées de μ^* .
 - À quelles conditions sur x_0 et z_0 ces dernières sont strictement positives ? Que valent dans ce cas x^* et z^* ?
- Déduire la solution de $(\mathcal{P})$ suivant les valeurs de x_0 et z_0 .

Exercice 6. (Examen final, UMBM, 2024/2025). Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x, y) = y - x^2$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

On considère les deux problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

- Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admettent au moins une solution globale.
- Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (P) .
- Calculer les solutions des problèmes (P) et (Q) .
- Montrer que la fonction f possède un point de maximum local strict sur $\mathcal{D}$.