

Exercice 1. (Examen final, UMBM 2019/2020). Soit la sphère S définie par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Pour déterminer les points de S les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(3, \sqrt{2}, \sqrt{5})$, on considère les problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in S \end{cases} \quad \text{et} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in S \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{5})^2.$$

1. Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.
2. Montrer que tous les points de S sont réguliers.
3. Résoudre les deux problèmes (P) et (Q) .

Exercice 2. (Examen final, UMBM 2020/2021). Soit une famille des cercles C_a définie par :

$$C_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1, \ a > 0\}.$$

Pour déterminer les points de C_a les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(0, 0)$, on considère les problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in C_a \end{cases} \quad \text{et} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in C_a \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.
2. Montrer que tous les points de C_a sont réguliers.
3. Résoudre les deux problèmes (P) et (Q) .
4. Si $a < 0$ et sans calcul, déduire les solutions des problèmes (P) et (Q) .
5. Calculer la distance minimale et la distance maximale entre le point A et le cercle C_a quand $a \rightarrow 0$.

Exercice 3. (Rattrapage, UMBM, 2020/2021). Le plan d'équation $2x + 4y = 5$ coupe le paraboloïde d'équation $x^2 + z^2 = 2y$ selon une ellipse. Il s'agit de déterminer les points de cette ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

1. Écrire cet énoncé sous forme des problèmes d'optimisation suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D \end{cases} \quad ; \quad (P2) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D, \end{cases}$$

où $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1(x, y, z) = 0, \ h_2(x, y, z) = 0\}$. Identifier la fonction objective f et les contraintes h_1 et h_2 .

2. Montrer que D est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^3$.
3. Déduire que les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$ admet au moins une solution globale.
4. Montrer que tous les points de D sont des points régulés.
5. Écrire la condition de la Lagrange associée aux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.

6. Résoudre les problèmes (P1) et (P2).

Exercice 4. (Examen final, UMBM, 2021/2022). Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ coupe le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ selon une ellipse. Il s'agit de déterminer les points de cette ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

1. Écrire cet énoncé sous forme des problèmes d'optimisation suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D \end{cases} ; (P2) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D, \end{cases}$$

où $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1(x, y, z) = 0, h_2(x, y, z) = 0\}$. Identifier la fonction objective f et les contraintes h_1 et h_2 .

2. Montrer que D est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.
3. Dédire que les deux problèmes (P1) et (P2) admet au moins une solution globale.
4. Montrer que tous les points de D sont des points réguliers.
5. Écrire la condition de la Lagrange associée aux problèmes (P1) et (P2).
6. Résoudre les problèmes (P1) et (P2).

Exercice 5. (Examen final, UMBM, 2022/2023). La température dans un plan dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par la fonction $f(x, y) = e^y(x^2 + y^2)$. Afin de déterminer les points le plus chaud et le plus froid sur le cercle $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 100\}$, nous résolvons les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C} \end{cases}, (P2) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

1. Montrer que les deux problèmes (P1) et (P2) admet des solutions.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
3. Écrire la condition de Lagrange associée aux problèmes (P1) et (P2).
4. Résoudre les deux problèmes (P1) et (P2).
5. Dédire la température minimale et la température maximale.

Exercice 6. (Examen final, UMBM, 2023/2024). La température au point (x, y, z) sur la sphère définie par :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est donnée par la fonction $f(x, y, z) = 400xyz^2$. Afin de déterminer la température minimale et la température maximale sur la sphère $\mathcal{S}$, nous considérons les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in \mathcal{S} \end{cases}, (P2) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

1. Montrer que les deux problèmes (P1) et (P2) admet des solutions.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers.
3. Écrire la condition de Lagrange associée aux problèmes (P1) et (P2).
4. Résoudre les deux problèmes (P1) et (P2).
5. Dédire la température minimale et la température maximale.