



Corrigé d'exercice 1:

1. Nous avons :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, h_1(x, y, z) = 2x + 4y - 5 \text{ et } h_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y.$$

2. Nous avons :

(a) Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de D telle que $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Nous avons

$$\begin{cases} 2x_n + 4y_n = 5, \\ x_n^2 + z_n^2 - 2y_n = 0. \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 2\bar{x} + 4\bar{y} = 5, \\ \bar{x}^2 + \bar{z}^2 = 2\bar{y}. \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in D \Rightarrow D \text{ fermé.}$$

(b) On suppose que D non borné, alors il existe une suite $(x_n, y_n, z_n) \in D$ telle que

$$(x_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{z}) \text{ et } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} 2x_n + 4y_n = 5, \\ x_n^2 + z_n^2 = 2y_n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty = 5, \\ \bar{x} + \bar{z} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction.}$$

3. La fonction f continue sur un sous-ensemble fermé et borné D . D'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$ admet au moins une solution globale.

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\alpha \nabla h_1(x, y, z) + \beta \nabla h_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta x = 0, \\ 4\alpha - 2\beta = 0, \\ 2\beta z = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

d'où, tous les points de D sont régulés.

5. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(2x + 4y - 5) + \lambda_2(x^2 + z^2 - 2y).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ 2y + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ 2z + 2\lambda_2 z = 0, \\ 2x + 4y = 5, \\ x^2 + z^2 = 2y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda_2)x = -\lambda_1, \\ y = \lambda_2 - 2\lambda_1, \\ (1 + \lambda_2)z = 0, \\ 2x + 4y = 5, \\ x^2 + z^2 = 2y. \end{cases}$$

6. Nous avons :

(a) Si $\lambda_2 = -1$, alors $\lambda_1 = 0$ c'est à dire $y = -1$, $x = 9/2$ et $z^2 = -85/4 < 0$, donc impossible.

(b) Si $\lambda_2 \neq -1$, alors $z = 0$, donc on a :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5, \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1) \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1).$$

Les points sont $(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0)$ et $(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0)$.

D'autre part, nous avons :

$$f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0\right) < f\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0\right).$$

i. Le point $(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0)$ est solution du problème $(P1)$.

ii. Le point $(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0)$ est solution du problème $(P2)$.

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 2\alpha)^2 = r^2 - 4\alpha r \sin \theta + 4\alpha^2.$$

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi(x,y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (r^2 - 4\alpha r \sin \theta + 4\alpha^2) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 - \frac{4\alpha \sin \theta}{r} + \frac{4\alpha^2}{r^2}\right) = +\infty,$$

d'où φ est coercive. (1)

2. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \Omega_1 \Rightarrow y_n \leq x_n^2 + \alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{y} \leq \bar{x}^2 + \alpha \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 \text{ fermé. (0,5)}$$

3. D'après la coercivité de la fonction φ et Ω_1 est fermé, alors le problème (P3) admet au moins un point de minimum global. (0,5)

4. On pose $g(x, y) = y - x^2 - \alpha$. Les conditions de K.K.T. données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x - 2\mu x = 0, \\ 2(y - 2\alpha) + \mu = 0, \\ \mu(y - x^2 - \alpha) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ (1 - \mu)x = 0, \\ y = -\frac{\mu}{2} + 2\alpha, \\ \mu(y - x^2 - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

(a) Si $\mu = 0$, alors $y < x^2 + \alpha$, $x = 0$ et $y = 2\alpha$. Mais $y - x^2 - \alpha = \alpha > 0$, donc impossible. (0,5)

(b) Si $\mu > 0$, alors $y = x^2 + \alpha$. Nous avons :

i. Si $\mu = 1$, alors $y = 2\alpha - \frac{1}{2}$ et $x = \pm \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}$, donc les points sont

$$\left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}, 2\alpha - \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}, 2\alpha - \frac{1}{2}\right). \quad (0,5)$$

ii. Si $\mu \neq 1$, alors $x = 0$, $y = \alpha$ et $\mu = 2\alpha$. Alors, le point est $(0, \alpha)$. (0,5)

Les trois points de K.K.T. sont actives et

$$\nabla g(x, y) = (-2x, 1)^T \neq 0, \quad (0,5)$$

d'où les trois points de K.K.T. sont réguliers.

5. Nous avons

$$\alpha - \frac{1}{4} = \varphi\left(\pm\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}, 2\alpha - \frac{1}{2}\right) < \varphi(0, \alpha) = \alpha^2, \quad (0,5)$$

d'où, les deux points $\left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}, 2\alpha - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}}, 2\alpha - \frac{1}{2}\right)$ sont des points de minimum global du problème (P_3) . (1)

6. La matrice hessienne donnée par :

$$\nabla^2 \mathcal{L}(0, \alpha, 2\alpha) = \nabla^2 \varphi(0, \alpha) + 2\alpha \nabla^2 g(0, \alpha) = \begin{bmatrix} 2 - 4\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (0,5)$$

Le point $(0, \alpha)$ est active et $\mu = 2\alpha > 0$. Donc, on calcul l'espace tangent au point $(0, \alpha)$:

$$T^*(0, \alpha, 2\alpha) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : Dg(0, \alpha)(x, y)^T = 0 \right\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \quad (0,5)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 4\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 2(1 - 2\alpha)x^2 < 0, \quad (1)$$

donc $(0, \alpha)$ est un de maximum local strict de φ sur Ω_1 .

7. (a) Nous avons :

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La fonction φ est strictement convexe sur Ω_2 . (0,5)

D'autre part, soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2).$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} y_1 \geq x_1^2 + \alpha, \\ y_2 \geq x_2^2 + \alpha, \end{cases} \Rightarrow (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \geq (1 - \lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2 + \alpha \geq [(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 + \alpha,$$

d'où $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \in \Omega_2$, donc Ω_2 est convexe. Alors, le problème (P_4) est convexe. (0,5)

(b) On pose $g(x, y) = x^2 + \alpha - y$. Les conditions de K.K.T. données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x + 2\mu x = 0, \\ 2(y - 2\alpha) - \mu = 0, \\ \mu(x^2 + \alpha - y) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ (1 + \mu)x = 0, \\ y = \frac{\mu}{2} + 2\alpha, \\ \mu(x^2 + \alpha - y) = 0. \end{cases} \quad (0,5)$$

i. Si $\mu = 0$, alors $x^2 + \alpha - y < 0$, $x = 0$ et $y = 2\alpha$.

ii. Si $\mu > 0$, alors $y = x^2 + \alpha$, $x = 0$ et $y = \alpha$. Mais $\mu = -2\alpha < 0$, contradiction.

La solution du problème (P_4) est le point $(0, 2\alpha)$.

(0,5)

