

Exercice 1. (06 pts). Une usine produit trois types de machines dont le coût de fabrication est :

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + yz - 30y - 30z,$$

où x , y et z sont les nombres de machines à fabriquer. L'usine fabrique 100 machines par moins. Le problème qui se pose est comment organiser la production pour minimiser le coût de production.

1. Modéliser ce problème.
2. Déterminer x , y et z .
3. Calculer le coût minimal de fabrication.

Exercice 2. (06 pts). On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P_a) : \begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ay + a^2, \\ y \leq x^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

1. Montrer que le problème (P_a) admet une solution quel que soit a .
2. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
3. Calculer les solutions de (P_a) en discutant en fonction du paramètre a .

Exercice 3. (08 pts). On note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. on considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \max f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ x \in K, \end{cases}$$

où K est l'ensemble des contraintes est donné par :

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

1. Montrer que le problème (Q) admet au moins une solution.
2. Montrer que tous les points de K sont réguliers.
3. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
4. Résoudre le problème (Q) .