

Exercice 1. (06 pts). Une usine produit trois types de machines dont le coût de fabrication est :

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + yz - 30y - 30z,$$

où x , y et z sont les nombres de machines à fabriquer. L'usine fabrique 100 machines par moins. Le problème qui se pose est comment organiser la production pour minimiser le coût de production.

1. Modéliser ce problème.
2. Déterminer x , y et z .
3. Calculer le coût minimal de fabrication.

Exercice 2. (06 pts). On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P_a) : \begin{cases} \min f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ay + a^2, \\ y \leq x^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

1. Montrer que le problème (P_a) admet une solution quel que soit a .
2. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
3. Calculer les solutions de (P_a) en discutant en fonction du paramètre a .

Exercice 3. (08 pts). On note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. on considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \max f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ x \in K, \end{cases}$$

où K est l'ensemble des contraintes est donné par :

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

1. Montrer que le problème (Q) admet au moins une solution.
2. Montrer que tous les points de K sont réguliers.
3. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
4. Résoudre le problème (Q) .

Corrigé d'exercice 1: 1. La modélisation du problème est un problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y, z) \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

2. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda(x + y + z - 100).$$

La condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 8x - 2y + \lambda = 0, \\ 4y - 2x + z - 30 + \lambda = 0, \\ 2z + y - 30 + \lambda = 0, \\ x + y + z = 100. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = -\lambda/2, \\ 4x - 7y = \lambda - 30, \\ x + y + z = 100. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\lambda}{16} + \frac{5}{4}, \\ y = \frac{-\lambda}{4} + 5, \\ z = \frac{-3\lambda}{8} + \frac{25}{2}, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

d'où $\lambda = -100$. Alors, on a : $x = 20$, $y = 30$ et $z = 50$.

D'autre part, nous avons :

$$\nabla f(x, y, z) = (8x - 2y, 4y - 2x + z - 30, 2z + y - 30)^T \text{ et } \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Donc, on a :

$$\Delta_1 = 8 > 0, \Delta_2 = 36 > 0 \text{ et } \Delta_3 = \det(\nabla^2 f(x, y, z)) = 48 > 0.$$

d'où, $\nabla^2 f(x, y, z)$ est définie positive pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donc f est strictement convexe. la contrainte Ω est un plan convexe fermé. D'après la condition nécessaire et suffisante le point $(20, 30, 50)$ est une solution optimale globale.

3. Le coût minimal de fabrication est donné par :

$$f(20, 30, 50) = 2300.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

$$f(x, y) = x^2 + (y - a)^2.$$

Donc,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty,$$

d'où f est coercive. D'autre part, le domaine de contrainte $\Omega = \{(x, y) : y \leq x^2; y \geq 0\}$ est sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ fermé. Alors, le problème (P_a) admet au moins une solution quel que soit a .

2. Soient $g_1(x, y) = y - x^2$ et $g_2(x, y) = -y$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \\ (1 - \mu_1)x = 0, \\ 2(y - a) + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ \mu_1(y - x^2) = 0, \\ \mu_2 y = 0. \end{cases}$$

3. Nous avons :

- (a) Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$, donc $y = 0$ et $x = 0$ avec $\mu_2 = -2a$ tel que $a \leq 0$. $(0, 0)$ est un solution.
- (b) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$, donc si $\mu_1 \neq 1$, nous avons $x = 0$ et $y = x^2 = 0$. $(0, 0)$ est un solution
Si $\mu_1 = 1$, nous avons $y = a$ et $x = \pm\sqrt{a}$ avec $a \geq 0$. Les points $(\sqrt{a}, a)$ et $(-\sqrt{a}, a)$, $a \geq 0$ sont solutions.
- (c) Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, donc $y = a$ et $x = 0$. $(0, a)$ avec $a \geq 0$ est un solution.
- (d) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$, donc $y = 0$ et $x = 0$. $(0, 0)$ est un solution.

Corrigé d'exercice 3: 1. Nous avons :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où f est coercive. D'autre part, l'ensemble du contrainte K fermé non vide. Alors, le problème (Q) admet au moins une solution.

2. On pose $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 1$ et $g_i(x) = -x_i, i = 1, \dots, n$. Nous avons :

$$\nabla h(x) = (1, 1, \dots, 1)^T \neq 0,$$

D'où, tous les points de K sont réguliers.

3. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont données par :

$$\begin{cases} \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ 2x_i + \lambda - \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mu_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

4. Nous avons :

(a) Si $\mu_i > 0$ pour tout i , alors $x_i = 0$, (impossible).

(b) Si $\mu_i = 0$ pour tout i , alors $x_i = -\lambda/2$. D'autre part, on a :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \lambda = -2/n \Rightarrow x_i = 1/n.$$

Le point $(1/n, \dots, 1/n)$ solution du problème (Q) .