

Problème 1. Soit $f_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f_a(x, y) = x^2 + ay^2 + 2axy \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

On considère les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivants :

$$(1) \begin{cases} \min f_a(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \max f_a(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C}', \end{cases}$$

avec $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$ et $\mathcal{C}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

1. Pour quelles valeurs de a , f_a est-elle strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. On pose $a = 1$.
 - (a) Montrer que (1) est un problème convexe.
 - (b) Montrer que le problème (1) admet une infinité des solutions à déterminer.
3. On pose $a = -1$.
 - (a) Est ce que le problème (1) est convexe ?
 - (b) Déterminer tous les points qui satisfont aux conditions de KKT pour la fonction f_a sur $\mathcal{C}$.
 - (c) Montrer que la fonction f_a possède un point de minimum local strict et un point selle sur $\mathcal{C}$.
4. On pose $a = 2$.
 - (a) Déterminer tous les points qui satisfont au condition de Lagrange pour la fonction f_a sur $\mathcal{C}'$.
 - (b) Calculer la solution du problème (2).

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + ay - 2 \\ 2y + ax - 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

2. f_a est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] > 0$ et $\det [\nabla^2 f_a(x, y)] > 0$.
Donc, on a :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 > 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in] -2, 2[$$

3. On pose $a = 2$.

- (a) Nous avons :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 > 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 0 \end{cases} \Rightarrow f_a \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^2$$

- (b) Nous avons :

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y)(x + y - 2).$$

Alors, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x, -x) = 0,$$

d'où f_a n'est pas coercive.

- (c) Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Donc, l'ensemble des points $\{(\mu, 1 - \mu) / \mu \in \mathbb{R}\}$ sont des points critiques. Mais la fonction f_a est convexe, donc d'après la condition nécessaire et suffisante du premier ordre la fonction f_a admet un infinié des points de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

- (d) la valeur minimale de f_a est $f_a(\mu, 1 - \mu) = -1$.

4. On pose $a > 2$.

- (a) Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 2 \\ 2y + ax = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{2+a},$$

d'où f_a admet un seul point critique $(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a})$.

- (b) Nous avons :

$$\det \left[\nabla^2 f_a \left(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a} \right) \right] = 4 - a^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a} \right) \text{ est un point selle.}$$