

Exercice 1. (10 pts). On désigne par $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}.$$

et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

1. Quelle est la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}$?
2. Montrer que le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y, z), \\ (x, y, z) \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1)$$

admet une solution globale.

3. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
4. Écrire la condition de Lagrange.
5. Résoudre le problème (1) et déduire la valeur optimale.

Exercice 2. (10 pts). Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles A et B . Le modèle A , le plus abordable, se vend à 1€ pièce. Quant au modèle B beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3€. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle A et y est le nombre de petites voitures du modèle B . On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. Déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle A et y jouets de modèle B .
2. Étudier la convexité de la fonction $P(x, y)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
3. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime.
 - (a) Proposer un modèle mathématique sous la forme d'un problème d'optimisation avec contraintes qui permet de maximiser le profit quotidien.
 - (b) Écrire les conditions de K.K.T de ce problème.
 - (c) Résoudre ce problème.
 - (d) Déduire le profit réalisé.

Corrigé d'exercice 1: 1. La nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}$ est un ellipsoïde.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3$, donc continue sur $\mathcal{C}$. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{C}$ est :

(a) **Fermé** : pour tout $(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C}$ converge vers (x, y, z) , nous avons :

$$x_n^2 + \frac{y_n^2}{4} + \frac{z_n^2}{9} = 1.$$

Par passage à la limite, on obtient $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est fermé.

(b) **Borné** : nous avons :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{C}, \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2 \leq 12.$$

Donc, $\mathcal{C}$ est borné.

D'après le théorème de Weierstrass, le problème (1) admet un minimum global.

3. On pose $h(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$. Nous avons :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{C}, \nabla h(x, y, z) = (2x, y/2, 2z/9) \neq (0, 0, 0),$$

alors tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

4. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 \right).$$

La condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x = 0, \\ (2 + \frac{\lambda}{2})y = 0, \\ (1 + \frac{\lambda}{9})z = 0, \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1. \end{cases}$$

5. Nous avons :

(a) Si $\lambda = -1$, nous avons : $(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$.

(b) Si $\lambda = -4$, nous avons : $(x, y, z) \in \{(0, 2, 0), (0, -2, 0)\}$.

(c) Si $\lambda = -9$, nous avons : $(x, y, z) \in \{(0, 0, 3), (0, 0, -3)\}$.

Nous avons :

$$1 = f(\pm 1, 0, 0) < f(0, \pm 2, 0) < f(0, 0, \pm 3) = 9,$$

alors le problème (1) admet $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$ comme solution globale. La valeur optimale est égale 1.

Corrigé d'exercice 2: 1. Le profit $P(x, y)$ est donné par :

$$P(x, y) = x + 3y - C(x, y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000.$$

2. Nous avons :

$$\nabla P(x, y) = \begin{bmatrix} -10x + 2y + 3 \\ -10y + 2x + 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 P(x, y) = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

Donc, on a $\det(\nabla^2 P(x, y)) = 96$ et $\text{tr}(\nabla^2 P(x, y)) = -20$. Alors, P n'est pas convexe.

3. Nous avons :

(a) Le modèle mathématique est donné par :

$$\begin{cases} \max P(x, y) \\ x + y \leq 20. \end{cases}$$

(b) On note par :

$$f(x, y) = -P(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 3x - 3y - 1000 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x + y - 20.$$

Les conditions de K.K.T sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 10x - 2y - 3 + \mu = 0, \\ 10y - 2x - 3 + \mu = 0, \\ \mu(x + y - 20) = 0. \end{cases}$$

(c) Nous avons :

i. Si $\mu > 0$, alors $x + y = 20$. Nous avons :

$$\begin{cases} 10x - 2y - 3 + \mu = 0, \\ 10y - 2x - 3 + \mu = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{3 - \mu}{8}.$$

Mais

$$\frac{3 - \mu}{4} = 20 \Rightarrow \mu = -77 \text{ (impossible)}$$

ii. Si $\mu = 0$, nous avons :

$$\begin{cases} 10x - 2y - 3 = 0, \\ 10y - 2x - 3 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{3}{8}.$$

D'autre part, on a :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

donc, $\det(\nabla^2 f(x, y)) = 96$ et $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) = 20$, le point $(3/8, 3/8)$ est une solution de ce problème.

(d) Le profit réalisé est $P(3/8, 3/8) = \frac{8009}{8} = 1001.125 \text{ €}$.