

Exercice 1. (05 pts). Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\phi(x) = \ln(x).$$

1. Montrer que ϕ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, (x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Exercice 2. (08 pts). On considère f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Soit l'ensemble suivant :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 1\} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Montrer que P est un ensemble convexe fermé.
2. Montrer que f est strictement convexe sur P .
3. Montrer que f possède un unique point de minimum global (x^*, y^*, z^*) sur P .
4. Déterminer (x^*, y^*, z^*) en écrivant les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1.

Exercice 3. (07 pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

1. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) \\ x^2 + y^2 \leq 10. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Expliquer pourquoi le problème (1) admet une unique solution.
- (b) Résoudre le problème (1).

Corrigé d'exercice 1: 1. La fonction ϕ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car :

$$\forall x > 0, \phi''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0.$$

2. Donc, on a :

$$\ln \left[\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right] \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \ln \left[(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \right].$$

D'après de la croissance de la fonction $x \mapsto e^x$, on obtient :

$$(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in P$ et $\lambda \in [0, 1]$.

(a) Nous avons :

$$(1 - \lambda)(x, y, z) + \lambda(x', y', z') = [(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y', (1 - \lambda)z + \lambda z'].$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} a[(1 - \lambda)x + \lambda x'] + b[(1 - \lambda)y + \lambda y'] + c[(1 - \lambda)z + \lambda z'] \\ = (1 - \lambda) \underbrace{(ax + by + cz)}_{=1} + \lambda \underbrace{(ax' + by' + cz')}_{=1} \\ = (1 - \lambda) + \lambda = 1. \end{aligned}$$

Alors, $(1 - \lambda)(x, y, z) + \lambda(x', y', z') \in P$ donc P est convexe.

(b) Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de P converge vers (x, y, z) . Nous avons : $ax_n + by_n + cz_n = 1$. Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $ax + by + cz = 1$. Donc, $(x, y, z) \in P$ d'où P est fermé.

2. Nous avons :

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

D'où $\nabla^2 f(x, y, z)$ est définie positive, donc f est strictement convexe sur P .

3. Nous avons :

- f est continue et strictement convexe sur P ,
- P est convexe fermé,
- $\lim_{\|(x, y, z)\| \rightarrow +\infty} f(x, y, z) = +\infty$.

Alors, f possède un unique point de minimum global (x^*, y^*, z^*) sur P .

4. Les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1 sont :

$$\begin{cases} 2x + \lambda a = 0, \\ 2y + \lambda b = 0, \\ 2z + \lambda c = 0, \\ ax + by + cz = 1. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda = 0$, alors $x = y = z = 0$ est impossible.

(b) Si $\lambda \neq 0$, alors nous avons :

$$x = -\lambda a/2, \quad y = -\lambda b/2, \quad z = -\lambda c/2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{-2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Alors, on a :

$$x^* = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y^* = \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z^* = \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Corrigé d'exercice 3: 1. Nous avons :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, $\nabla^2 f(x, y)$ est définie positive d'où f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. Nous avons :

(a) Le problème (1) admet unique solution car :

- f est continue et strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
- La contrainte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10\}$ est convexe, fermé et borné.

(b) Les conditions de KKT sont des conditions nécessaires et suffisantes. Donc, on a :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2(x - 1) + 2\mu x = 0, \\ 2(y - 2) + 2\mu y = 0, \\ \mu(x^2 + y^2 - 10) = 0. \end{cases}$$

- Si $\mu > 0$, alors $x^2 + y^2 = 10$. Nous avons :

$$\begin{cases} (1 + \mu)x = 1, \\ (1 + \mu)y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1+\mu}, \\ y = \frac{2}{1+\mu}. \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$x^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0 \quad \text{impossible.}$$

- Si $\mu = 0$, alors $x = 1$ et $y = 2$.

Finalement, la solution du problème (1) est $(1, 2)^T$.