

Exercice 1. (06 pts). Soit la parabole P définie par :

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Pour déterminer les points de P les plus proche du point A de coordonnées $(0, 1)$, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in P \end{cases} \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2.$$

1. Montrer que la fonction f est coercive.
2. Montrer que tous les points de P sont réguliers.
3. Montrer que le problème (1) admet au moins une solution globale.
4. Résoudre le problème (1).

Exercice 2. (08 pts). Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\varphi(x, y) = x^3 + y^3.$$

On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min \varphi(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (2)$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Montrer que le problème (2) admet au moins une solution globale.
2. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (2).
3. Calculer les solutions du problème (2).
4. Montrer que la fonction φ admet un point de maximum local strict sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3. (06 pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = e^x + y^2.$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (3)$$

où $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$.

1. Montrer que la fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que le domaine $\mathcal{S}$ est convexe.
3. On suppose que le problème (3) admet une solution unique notée par (x^*, y^*) .
 - (a) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (3).
 - (b) Montrer que $e^{x^*} + 2x^* - 2 = 0$.
 - (c) Montrer que $x^*, y^* \in]0, 1[$.