

Exercice 1. (12pts). Soit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f_\alpha(x, y) = x^2 + 2y^2 - \alpha xy + 3x - 4y,$$

où α est un paramètre réel, et soit $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x + y = 3\}$.
On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f_\alpha(x, y), \\ (x, y) \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1)$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
3. On suppose que $|\alpha| < 2\sqrt{2}$.
 - (a) Montrer que le problème (1) est un problème convexe.
 - (b) Calculer la solution globale du problème (1) en fonction de α .
4. On pose $\alpha = 3$.
 - (a) Montrer que la fonction f_α n'est pas coercive.
 - (b) Montrer que le problème (1) admet une solution locale stricte à déterminé.
5. On pose $\alpha = -3$.
 - (a) Écrire la condition de la Lagrange du problème (1).
 - (b) Montrer que le problème (1) n'admet aucune solution.

Exercice 2. (08pts). Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x, y) = y - x^2$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

On considère les deux problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

1. Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admettent au moins une solution globale.
2. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (P).
3. Calculer les solutions des problèmes (P) et (Q).
4. Montrer que la fonction f possède un point de maximum local strict sur $\mathcal{D}$.