

Exercice 1. (08pts). La température au point (x, y, z) sur la sphère $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est donnée par la fonction $f(x, y, z) = 400xyz^2$.

Afin de déterminer la température minimale et la température maximale sur la sphère $\mathcal{S}$, nous considérons les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in \mathcal{S} \end{cases}, \quad (P2) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

1. Montrer que les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$ admet des solutions.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers.
3. Écrire la condition de Lagrange associée aux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.
4. Résoudre les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.
5. Dédire la température minimale et la température maximale.

Exercice 2. (12pts). Soient $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \min f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z - z_0)^2, \\ (x, y, z) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des contraintes donnés par :

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x + z = 1\}.$$

1. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ est convexe.
2. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème $(\mathcal{P})$. Sont-elles nécessaires ? suffisantes ?
3. Soit $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^5$ un point qui satisfait les conditions KKT. Montrer que $y^* = 0$.
4. On suppose que $\mu^* = 0$.
 - (a) Exprimer x^*, z^* et λ^* en fonction de x_0 et z_0 .
 - (b) Á quelle condition sur x_0 et z_0 le point obtenu satisfait la contrainte d'inégalité ?
5. On suppose que $\mu^* > 0$.
 - (a) Montrer que $(x_0 + z_0 - 2\lambda^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2$.
 - (b) Résoudre l'équation du second degré en λ^* obtenue à la question précédente pour obtenir les valeurs possibles de λ^* .
 - (c) Calculer les valeurs associées de μ^* .
 - (d) Á quelles conditions sur x_0 et z_0 ces dernières sont strictement positives ? Que valent dans ce cas x^* et z^* ?
6. Dédire la solution de $(\mathcal{P})$ suivant les valeurs de x_0 et z_0 .