

Exercice 1. (07pts). La température dans un plan dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par la fonction $f(x, y) = e^y(x^2 + y^2)$. Afin de déterminer les points le plus chaud et le plus froid sur le cercle $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 100\}$, nous résolvons les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C} \end{cases}, \quad (P2) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

1. Montrer que les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$ admet des solutions.
2. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
3. Écrire la condition de Lagrange associée aux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.
4. Résoudre les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.
5. Déduire la température minimale et la température maximale.

Exercice 2. (13pts). Soient $\varphi_a(x, y) = (1 - a)x^4 + (1 + a)y^4$ est une fonction avec a est un paramètre réel et Ω_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P3) : \begin{cases} \min \varphi_a(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a , la fonction φ_a est convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que Ω_1 est un sous-ensemble fermé.
3. On pose $a = 1/2$.
 - (a) Avec les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, montrer que la fonction φ est coercive.
 - (b) Déduire que le problème $(P3)$ admet au moins une solution.
 - (c) Calculer tous les points satisfont les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème $(P3)$.
 - (d) Préciser les solutions du problème $(P3)$.
 - (e) Avec la condition suffisante d'optimalité du second ordre, montrer que la fonction φ_a admet quatre points de maximum local strict sur Ω_1 .
4. Soit $a = 1$. On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P4) : \begin{cases} \min \varphi_a(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

$$\text{où } \Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- (a) Montrer que le problème $(P4)$ est un problème convexe ?
- (b) Montrer que le problème $(P4)$ admet infinité des solutions qu'il faut déterminer.