

Exercice 1. (08pts). Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ coupe le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ selon une ellipse. Il s'agit de déterminer les points de cette ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

1. Écrire cet énoncé sous forme des problèmes d'optimisation suivants :

$$(P1) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D \end{cases} ; (P2) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in D, \end{cases}$$

où $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1(x, y, z) = 0, h_2(x, y, z) = 0\}$. Identifier la fonction objective f et les contraintes h_1 et h_2 .

- Montrer que D est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.
- Déduire que les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$ admet au moins une solution globale.
- Montrer que tous les points de D sont des points réguliers.
- Écrire la condition de la Lagrange associée aux problèmes $(P1)$ et $(P2)$.
- Résoudre les problèmes $(P1)$ et $(P2)$.

Exercice 2. (12pts). Soient $\varphi(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ et Ω_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha x \leq y^2, 0 < \alpha < 1\}.$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P3) : \begin{cases} \min \varphi(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \end{cases}$$

- Avec le changement des variables $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, montrer que la fonction φ est coercive.
- Montrer que Ω_1 est un sous-ensemble fermé.
- Déduire que le problème $(P3)$ admet au moins un point de minimum global.
- Calculer tous les points satisfont les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème $(P3)$.
- Préciser les points de minimum global du problème $(P3)$.
- Avec la condition suffisante d'optimalité du second ordre, montrer que la fonction φ admet un point de maximum local strict sur Ω_1 .
- On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P4) : \begin{cases} \min \varphi(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

où $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha x \geq y^2, 0 < \alpha < 1\}$.

- Montrer que le problème $(P4)$ est un problème convexe.
- Résoudre le problème $(P4)$.