

Exercice 1. (08pts). Soit la sphère S définie par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Pour déterminer les points de S les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(3, \sqrt{2}, \sqrt{5})$, on considère les problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in S \end{cases} \quad \text{et} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y, z) \\ (x, y, z) \in S \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{5})^2.$$

1. Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.
2. Montrer que tous les points de S sont réguliers.
3. Résoudre les deux problèmes (P) et (Q) .

Exercice 2. (12pts). Un agriculteur produit du blé en utilisant un tracteur (qu'il conduit lui même, équivalent à 1000 heures de travail), du travail salarié en quantité x et des engrais en quantité y . Le prix d'une heure de travail est 1€ et le prix d'une unité d'engrais est 2€. La fonction de production de blé est donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ par :

$$\varphi(x, y) = \sqrt{(1000 + x)y}.$$

Supposons que l'agriculteur dispose d'une enveloppe d'une valeur $a > 0$. On considère l'ensemble des contraintes défini par :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + 2y \leq a\}$$

1. Montrer que le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max \varphi(x, y) \\ (x, y) \in C \end{cases} \quad (1)$$

admet au moins une solution globale notée par (x^*, y^*) .

2. Montrer que $y^* > 0$.
3. Calculer $\nabla \varphi(x^*, y^*)$.
4. Avec les conditions de KKT du problème (1), montrer qu'il existe $\mu \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = -2\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ \mu x^* = 0, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases}$$

5. Posons $a = 500$ €.
- (a) Montrer que (x^*, y^*) est un point régulier.
- (b) Résoudre le problème (1).
- (c) Déduire la quantité de blé produite.
6. Trouver la valeur minimale de a pour que l'agriculteur fasse appel à de la main d'œuvre.

Corrigé d'exercice 1: 1. Soit $(x_n, y_n, z_n) \in S$ avec $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Donc, on a :

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 4 \text{ par passage à la limite } \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 4 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S \Rightarrow S \text{ est fermé.}$$

D'autre part, on a :

$$\forall (x, y, z) \in S : \|(x, y, z)\| = 2 \Rightarrow S \text{ est borné.}$$

Par conséquent, f est continue sur S , d'après le théorème de Weierstrass les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.

2. On pose $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Nous avons :

$$\forall (x, y, z) \in S : \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0 \Rightarrow \text{tous les points de } S \text{ sont réguliers.}$$

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z),$$

donc la condition de Lagrange est donné par :

$$\begin{cases} 2(x - 3) + 2\lambda x = 0, \\ 2(y - \sqrt{2}) + 2\lambda y = 0, \\ 2(z - \sqrt{5}) + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1+\lambda}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{1+\lambda}, \\ z = \frac{\sqrt{5}}{1+\lambda}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -3.$$

(a) Si $\lambda = 1$, alors $(x, y, z) = (3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2)$.

(b) Si $\lambda = -3$, alors $(x, y, z) = (-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2)$.

D'autre part, nous avons :

$$f(3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2) = 4 \text{ et } f(-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2) = 36.$$

Donc, $(3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2)$ est une solution de (P) et $(-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2)$ est une solution de (Q) .

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

(a) φ est continue sur C .

(b) Montrons que C est fermé : soit $(x_n, y_n) \in C$ avec $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Donc, on a :

$$x_n \geq 0; y_n \geq 0; x_n + 2y_n \geq a \Rightarrow \bar{x} \geq 0; \bar{y} \geq 0; \bar{x} + 2\bar{y} \geq a \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in C.$$

(c) Montrons que C est borné : on suppose que C n'est pas borné. alors il existe $(x_n, y_n) \in C$ telle que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$x_n + 2y_n \leq a \Rightarrow +\infty \leq a \text{ impossible.}$$

D'après théorème de Weierstrass, le problème (1) admet au moins une solution globale.

2. On suppose que $y^* = 0$, alors $\varphi(x^*, 0) = 0$. D'autre part, x^* représente un travail salarié et y^* représente une quantité des engrais, donc $\varphi(x^*, y^*) > 0$ d'où contradiction. Alors, $y^* > 0$.

3. Nous avons :

$$\nabla \varphi(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{y^*}{2\sqrt{(1000+x^*)y^*}} \\ \frac{1000+x^*}{2\sqrt{(1000+x^*)y^*}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} \end{bmatrix}$$

4. On pose $f(x, y) = -\varphi(x, y)$, $g_1(x, y) = -x$, $g_2(x, y) = -y$ et $g_3(x, y) = x + 2y - a$. Alors, Les conditions d'optimalités de KKT sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} - \mu_1 + \mu_3 = 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} - \mu_2 + 2\mu_3 = 0, \\ \mu_1 x^* = 0, \\ \mu_2 y^* = 0, \\ \mu_3 (x^* + 2y^* - a) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

D'après la question 2., nous avons $y^* > 0$, donc $\mu_2 = 0$. Le système (2) devient :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_3 \geq 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} - \mu_1 + \mu_3 = 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} + 2\mu_3 = 0, \\ \mu_1 x^* = 0, \\ \mu_3 (x^* + 2y^* - a) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Nous avons :

$$\mu_3 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} > 0 \Rightarrow x^* + 2y^* = a.$$

Le système (3) devient ($\mu = \mu_1$) :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = -2\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ \mu x^* = 0, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases}$$

5. On pose $a = 500\text{€}$. Nous avons

(a) Nous avons :

$$\nabla g_3(x, y) = (1, 2)^T \neq 0 \Rightarrow (x^*, y^*) \text{ est un point régulier.}$$

(b) Si $\mu = 0$, alors $x^* > 0$. Nous avons :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ x^* + 2y^* = 500. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^* - x^* = 1000, \\ x^* + 2y^* = 500 \end{cases} \Leftrightarrow x_* = -250 \text{ impossible.}$$

Si $\mu > 0$, alors $x^* = 0$, donc $y^* = 250$ et $\mu = 1/2$. la solution globale du problème (1) est le point $(0, 250)$.

(c) La quantité de blé produite est donnée par :

$$\varphi(0, 250) = 500.$$

6. L'agriculteur fasse appel à de la main d'œuvre, alors $x^* > 0$ donc $\mu = 0$. Nous avons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2y^* - x^* = 1000, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases} \Rightarrow x^* = \frac{a - 1000}{2} > 0 \text{ et } y^* = \frac{a + 1000}{4}.$$

Donc, la valeur minimale de a est $a = 1001 \text{ €}$.