

Exercice 1. (10 pts). On désigne par $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x + y + z = 0\}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}$?
2. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}$ est fermé et borné.
3. Déterminer le carré de la distance entre le point $(1, 1, 0)$ et un point (x, y, z) de $\mathcal{C}$ notée par $f(x, y, z)$.
4. Dédire que le problème d'optimisation avec contraintes défini par :

$$\begin{cases} \max f(x, y, z), \\ (x, y, z) \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1)$$

admet une solution globale.

5. Montrer que tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
6. Écrire la condition de Lagrange.
7. Résoudre le problème (1) et déduire la distance optimale.

Exercice 2. (10 pts). Une ville B est à 10 km à l'est d'une ville A et une ville C est à 3 km au nord de la ville B . Voir Figure 1.

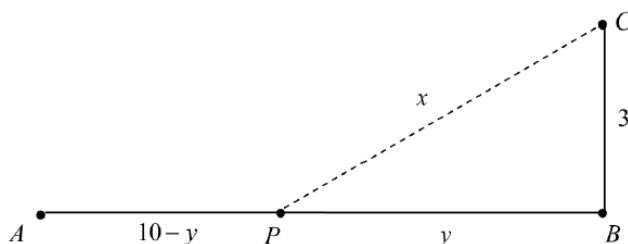


FIGURE 1 – Ville A , B et C .

On veut réaliser un projet d'autoroute entre les villes A et C . Le coût de 1 km d'autoroute le long de la route existante entre A et B est de 400000\$, alors que le coût de 1 km d'autoroute ailleurs est de 500000\$. On désire déterminer où doit se situer le point pivot P (c'est-à-dire, à quelle distance de A , l'autoroute doit bifurquer pour être construite en plein champ) pour minimiser le coût de réalisation de l'autoroute.

Enfin, on impose que la bifurcation ait lieu à au moins 3 km de l'entrée de la ville B , afin d'éviter qu'elle ne subisse une trop forte pollution au quotidien.

1. Modéliser ce problème comme un problème de minimisation d'une fonction g des deux variables x et y avec l'ensemble des contraintes défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 3 \leq y \leq 10\}.$$

Où g et h sont des fonctions à déterminer.

2. Montrer que le sous-ensemble Ω est fermé et borné.
3. Dédire que ce problème admet une solution globale.
4. Montrer que tous les points de Ω sont réguliers.
5. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
6. Résoudre ce problème.
7. Dédire le coût optimal de l'autoroute.

Corrigé d'exercice 1: 1. $\mathcal{C}$ est l'intersection de la sphère unité avec un plan et le point $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ est dans l'intersection, donc $\mathcal{C}$ est non vide, c'est donc un cercle.

2. Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de $\mathcal{C}$ converge vers (x, y, z) . Alors, nous avons :

$$(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1 \text{ et } x_n + y_n + z_n = 0.$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient que $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ d'où $\mathcal{C}$ est fermé.

D'autre part, nous avons :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{C} : \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1.$$

D'où $\mathcal{C}$ est borné.

3. Nous avons :

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2.$$

4. La fonction f est continue et $\mathcal{C}$ est fermé et borné, donc avec le théorème de Weierstrass le problème (1) admet une solution globale c'est à dire un maximum global.

5. On pose $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $h_2(x, y, z) = x + y + z$. Nous avons :

$$\nabla h_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^T \text{ et } \nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\alpha \nabla h_1(x, y, z) + \beta \nabla h_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\alpha + \beta = 0, \\ 2y\alpha + \beta = 0, \\ 2z\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

D'où $\nabla h_1(x, y, z)$ et $\nabla h_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendants. Donc, tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

6. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -(x - 1)^2 - (y - 1)^2 - z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z).$$

La condition de Lagrange est le suivant :

$$-2(x - 1) + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad (2)$$

$$-2(y - 1) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \quad (3)$$

$$-2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0, \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (5)$$

$$x + y + z = 0. \quad (6)$$

7. Additionnons les équations (2), (3) et (4) et en utilisant (6), on obtient : $\lambda_2 = -4/3$. D'autre part, on a :

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)x = 1/3, \\ (1 - \lambda_1)y = 1/3, \\ (1 - \lambda_1)z = -2/3. \end{cases}$$

En utilisant (5), on obtient :

$$(1 - \lambda_1)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \Rightarrow 1 - \lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Donc, deux points sont vérifiés la condition de Lagrange tels que $A = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Mais, $f(B) > f(A)$ donc

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

et la distance optimale est donnée par :

$$d = \sqrt{f(x^*, y^*, z^*)} = \sqrt{3 + \frac{2\sqrt{6}}{3}} \approx 2.15.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. La modélisation de ce problème est :

$$\begin{cases} \min g(x, y) = 4.10^5(10 - y) + 5.10^5x, \\ h(x, y) = x^2 - y^2 - 9, \\ g_1(x, y) = -x \leq 0, \\ g_2(x, y) = 3 - y \leq 0, \\ g_3(x, y) = y - 10. \end{cases} \quad (7)$$

2. Soient $(x_n, y_n) \in \Omega$. Alors, nous avons :

$$x_n^2 - y_n^2 - 9 = 0 \text{ et } x_n \geq 0 \text{ et } 3 \leq y_n \leq 10.$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $(x, y) \in \Omega$ d'où Ω est fermé.

D'autre part, nous avons :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2y^2 + 9}.$$

Donc, on a :

$$\forall (x, y) \in \Omega, 3\sqrt{3} \leq \|(x, y)\| \leq \sqrt{209},$$

d'où Ω est borné.

3. La fonction g est continue sur Ω et Ω est fermé et borné. donc, avec le théorème de Weierstrass, le problème de d'optimisation (7) admet une solution globale c'est à dire un minimum global.

4. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, -2y)^T \neq 0$ puisque $y \geq 0$, donc tous les points de Ω sont réguliers.

5. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont :

$$5.10^5 + 2\lambda x - \mu_1 = 0, \quad (8)$$

$$-4.10^5 - 2\lambda y - \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad (9)$$

$$x^2 - y^2 = 9, \quad (10)$$

$$x \geq 0, \quad (11)$$

$$3 \leq y \leq 10, \quad (12)$$

$$\mu_1 x = 0, \quad (13)$$

$$\mu_2 (3 - y) = 0, \quad (14)$$

$$\mu_3 (y - 10) = 0. \quad (15)$$

6. Nous avons :

(a) On suppose que $\mu_1 > 0$, implique que $x = 0$ donc $y^2 = -9$, ce qui est impossible. Alors, $\mu_1 = 0$ et $x > 0$.

(b) On suppose que $\mu_2 > 0$, implique que $y = 3$ donc $x = 3\sqrt{2}$ et $\lambda = -\frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}$, $\mu_3 = 0$, $\mu_2 = -4.10^5 + \frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}.3 < 0$ ce qui est impossible. Donc, $\mu_2 = 0$ et $y > 3$.

(c) On suppose que $\mu_3 > 0$, implique que $y = 10$, donc $x = \sqrt{109}$, $\lambda = -\frac{5.10^5}{2\sqrt{109}}$ et $\mu_3 = 4.10^5 - 2.10. \frac{5.10^5}{2\sqrt{109}} < 0$, ce qui est impossible. Donc, μ_3 et $y < 10$.

Finalement, $\lambda \neq 0$ nécessairement, puis $x = -\frac{5.10^5}{2\lambda}$ et $y = -\frac{4.10^5}{2\lambda}$. Puisque $x^2 - y^2 = 9$, il vient $\lambda = -\frac{10^5}{2}$. Ainsi,

$$x = 5 \text{ et } y = 4.$$

7. le coût optimal de l'autoroute est donné par :

$$g(4, 5) = 24.10^5 + 25.10^5 = 49000000\$.$$