

Exercice 1. (10 pts). Une boîte fermée en carton pour l'emballage de petites boules en mousse doit être fabriquée comme indiqué sur la Figure 1. Les faces supérieure, inférieure et avant doivent être à double poids (c'est-à-dire deux pièces de carton). Un problème posé est de trouver les dimensions d'une telle boîte qui maximisent le volume pour une quantité donnée de carton, égale à $18m^2$.

1. Modéliser ce problème.
2. Écrire la condition de Lagrange qui doit être satisfaite par x , y et z . Calculer x , y et z .
3. Le point (x, y, z) est-il un point régulier ?
4. Est-ce que le point (x, y, z) satisfait la condition suffisante d'optimalité du seconde ordre ?

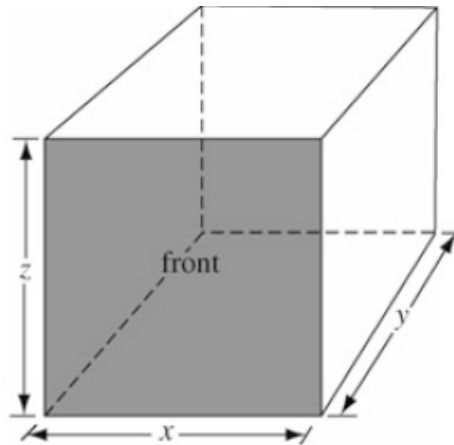


FIGURE 1 – Boîte d'emballage.

Exercice 2. (10 pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f_{\alpha}(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On considère le problème de minimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f_{\alpha}(x, y) \\ (x, y) \in C, \end{cases} \quad (1)$$

avec $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$.

1. Pour quelles valeurs de α , f_{α} est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. On pose $\alpha = 1/4$.
 - (a) Montrer que (1) est un problème convexe.
 - (b) Résoudre le problème (1).
3. On pose $\alpha = 1/8$.
 - (a) Est ce que le problème (1) est convexe ?
 - (b) Déterminer tous les points qui satisfont aux conditions de KKT.
 - (c) Avec les conditions suffisantes d'optimalité du seconde ordre, montrer que la fonction f_{α} possède un point de minimum local strict et un point selle sur C .

Corrigé d'exercice 1: 1. La modélisation du problème est donnée par :

$$\begin{cases} \max xyz \\ 3xz + 2yz + 4xy = 18 \end{cases}$$

2. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(3xz + 2yz + 4xy - 18).$$

Donc, la condition de Lagrange est donnée par :

$$yz + \lambda(3z + 4y) = 0, \quad (2)$$

$$xz + \lambda(2z + 4x) = 0, \quad (3)$$

$$xy + \lambda(3x + 2y) = 0, \quad (4)$$

$$3xz + 2yz + 4xy = 18. \quad (5)$$

(a) Si $\lambda = 0$, en multipliant (2) par 2, (3) par 3, (4) par 4 on obtient :

$$2yz + 3xz + 4xy = 0,$$

d'où contradiction avec (5).

(b) Si $\lambda \neq 0$, en multipliant (2) par x , (3) par y et avec la différence on obtient :

$$\lambda z(3x - 2y) = 0 \Rightarrow 3x = 2y.$$

En multipliant (3) par y , (4) par z et avec la différence on obtient :

$$\lambda x(4y - 3z) = 0 \Rightarrow 4y = 3z.$$

Donc, $z = 2x$ et $y = \frac{3}{2}x$. En remplaçant dans (5), on obtient $x = 1$, donc $y = 3/2$ et $z = 2$. D'après (2), on obtient $\lambda = -1/4$.

3. On pose $h(x, y, z) = 3xz + 2yz + 4xy - 18$. Nous avons :

$$\nabla h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3z + 4y \\ 2z + 4x \\ 3x + 2y \end{bmatrix} \neq 0.$$

D'où, tous les points réalisables sont des points réguliers.

4. On pose $f(x, y, z) = xyz$. Nous avons :

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc, la matrice hessienne de la fonction de Lagrange au point $(1, 3/2, 2)$ est donnée par :

$$\mathbf{L}(1, 3/2, 2, -1/4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

L'espace tangent est donné par :

$$T^*(1, 3/2, 2, -1/4) = \left\{ \left(x, y, -2x - \frac{4}{3}y \right) : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & y & -2x - \frac{4}{3}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2x - \frac{4}{3}y \end{bmatrix} = -2x^2 - (x + y)^2 < 0.$$

Donc, $(1, 3/2, 2)$ est un point de maximum local strict.

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

$$\nabla f_{\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 \\ 2\alpha y + x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f_{\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

La fonction f_{α} est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\begin{cases} \text{tr}(\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)) \geq 0, \\ \det[\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)] \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + \alpha) \geq 0, \\ 4\alpha - 1 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \geq 1/4.$$

2. On pose $\alpha = 1/4$.

(a) D'après la question 1., la fonction f_{α} est convexe. D'autre part, C est un demi-espace fermé est convexe. Donc, le problème (1) est convexe.

(b) Les conditions de KKT sont des conditions nécessaires est suffisantes. Nous avons :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x + y + 1 + \mu = 0, \\ \frac{y}{2} + x + \mu = 0, \\ \mu(x + y - 1) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu = 0$, on a :

$$\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 = 0 \text{ impossible}$$

ii. Si $\mu > 0$, alors

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = -2. \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ et } y = 4.$$

La solution du problème (1) est $(-3, 4)$.

3. On pose $\alpha = 1/8$.

(a) La fonction f_{α} n'est pas convexe. Donc, le problème (1) n'est pas convexe.

(b) Les conditions de KKT :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x + y + 1 + \mu = 0, \\ \frac{y}{4} + x + \mu = 0, \\ \mu(x + y - 1) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu = 0$, alors on a :

$$\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/2, y = -2.$$

Donc, $(1/2, -2)$ est un point régulier car $\nabla g(1/2, -2) = (1, 1)^T \neq 0$.

ii. Si $\mu > 0$, alors $x + y = 1$. Nous avons :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 - \mu, \\ \frac{y}{4} + x = -\mu \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - 3\mu}{2}, y = 2(\mu - 1).$$

Donc, on a :

$$x + y = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - 3\mu}{2} + 2(\mu - 1) = 1 \Leftrightarrow \mu = 5.$$

D'où $x = -7$ et $y = 8$. Donc, $(-7, 8)$ est un point régulier.

(c) La matrice hessienne et donnée par :

$$L(x^*, y^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}$$

-
- i. Pour $(-7, 8)$, la contrainte est active donc l'espace tangent est donné par :

$$T^*(-7, 8, 5) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x^2/4 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

Alors, $(-7, 8)$ est un point de minimum local strict de f_α sur C .

- ii. Pour $(1/2, -2)$, la contrainte n'est pas active c'est à dire $(1/2, -2)$ appartient à l'intérieur de C .
D'autre part,

$$\det [L(x^*, y^*, \mu^*)] = -1/2 < 0.$$

Donc, $(1/2, -2)$ est un point selle de f_α sur C .