

Corrigé d'exercice 1:

1. Soient $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left[1 - \frac{2 \sin \theta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] = +\infty, \quad (1)$$

d'où f est coercive.

2. On pose $h(x,y) = y - x^2$. Nous avons :

$$\nabla h(x,y) = (-2x, 1)^T \neq 0,$$

d'où tous les points de P sont réguliers.

3. Soit $(x_n, y_n) \in P$ telle que $x_n \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{x}$ et $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{y}$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in P \Rightarrow y_k = x_k^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{y} = \bar{x}^2$$

d'où $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$, alors P est fermé. D'après f est coercive et P est fermé, donc le problème (1) admet au moins une solution globale.

4. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(y-x^2).$$

la condition de Lagrange :

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0, \\ 2(y-1) + \lambda = 0, \\ y = x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 0, \\ y = \frac{2-\lambda}{2}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda = 1$, alors $y = 1/2$ et $x = \pm 1/\sqrt{2}$. les points sont $(1/\sqrt{2}, 1/2)$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$.

(b) Si $\lambda \neq 1$, alors $x = 0$, donc $y = 0$. Le point est $(0, 0)$.

Nous avons :

$$f(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2) = 3/4 \text{ et } f(0, 0) = 1,$$

donc $(1/\sqrt{2}, 1/2)$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$ solutions du problème (1).

Corrigé d'exercice 2:

1. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part, $\mathcal{D}$ est un disque fermé et borné. D'après théorème de Weierstrass, le problème (2) admet au moins une solution globale.

2. On pose $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 3x^2 + 2\mu x = 0, \\ 3y^2 + 2\mu y = 0, \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ x(3x + 2\mu) = 0, \\ y(3y + 2\mu) = 0, \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

3. Nous avons :

(a) Si $\mu = 0$, alors $x^2 + y^2 < 1$, donc $x = y = 0$. Le point est $(0, 0)$.

(b) Si $\mu \neq 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$. Nous avons :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2\mu}{3}, \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2\mu}{3}. \end{cases}$$

i. Si $x = 0$, alors $y = -1$ et $\mu = 3/2$. Le point est $(0, -1)$.

ii. Si $y = 0$, alors $x = -1$ et $\mu = 3/2$. Le point est $(-1, 0)$.

iii. Si $x = y = -\frac{2\mu}{3}$, alors $\mu = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Le point est $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Nous avons :

$$\varphi(0, 0) = 0, \varphi(0, -1) = -1, \varphi(-1, 0) = -1, \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ sont solutions du problème (2).

4. Nous avons :

$$\nabla\varphi(x, y) = (3x^2, 3y^2)^T, \quad \nabla^2\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

D'autre part, nous avons :

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T, \quad \nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice Hessienne est donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

et

$$T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = -3\sqrt{2}x^2 < 0,$$

alors, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ est un point de maximum local strict de la fonction φ sur $\mathcal{D}$.

Corrigé d'exercice 3:

1. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = (e^x, 2y)^T, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Alors, on a :

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 f(x, y)) = 2e^x > 0, \\ \text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) = 2 + e^x > 0, \end{cases}$$

d'où, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = ((1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y').$$

Alors, on a :

$$(1 - \lambda)x + \lambda x' + (1 - \lambda)y + \lambda y' = (1 - \lambda)(x + y) + \lambda(x' + y') \geq 1,$$

d'où

$$(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in \mathcal{S},$$

donc $\mathcal{S}$ est convexe.

3. On pose $g(x, y) = 1 - x - y$. On suppose que (x^*, y^*) est l'unique solution du problème (3).

(a) Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (3) sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ e^{x^*} - \mu = 0, \\ 2y^* - \mu = 0, \\ \mu(1 - x^* - y^*) = 0. \end{cases}$$

(b) Nous avons :

- i. Si $\mu = 0$, alors $x^* + y^* > 1$ et $y^* = 0, e^{x^*} = 0$, impossible.
- ii. Si $\mu > 0$, alors $x^* + y^* = 1$. Alors on a :

$$\begin{cases} e^{x^*} = 2y^*, \\ x^* + y^* = 1. \end{cases} \Leftrightarrow e^{x^*} + 2x^* - 2 = 0.$$

(c) On pose $\psi(x) = e^x + 2x - 2$. la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\psi(1) = e \text{ et } \psi(0) = -1,$$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $0 < x^* < 1$ tel que $\psi(x^*) = 0$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi'(x) = e^x + 2 > 0,$$

donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, x^* est unique. Ainsi,

$$0 < x^* < 1 \Leftrightarrow 0 < y^* = 1 - x^* < 1.$$