

Corrigé d'exercice 1:

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Soient $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 = 100 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 100 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est fermé.}$$

D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est borné.}$$

D'après théorème de Weierstrass, la fonction f admet au moins un point de minimum global et un point de maximum global sur $\mathcal{C}$ c'est à dire les deux problèmes (P1) et (P2) admet des solutions globales.

2. On pose $h(x, y) = x^2 + y^2 - 100$. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)^T \neq 0$, alors tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^y (x^2 + y^2) + \lambda (x^2 + y^2 - 100).$$

La condition de Lagrange est :

$$\begin{cases} x(e^y + \lambda) = 0, \\ e^y(x^2 + y^2 + 2y) + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

4. Nous avons :

(a) Si $e^y = -\lambda$, alors $100e^y + 2ye^y - 2ye^y = 0$ c'est à dire $e^y = 0$ donc impossible.

(b) Si $x = 0$, alors $y = 10$ et $\lambda = -6e^{10}$, $y = -10$ et $\lambda = 4e^{-10}$.

Les points sont $(0, 10)$ avec $\lambda = -6e^{10}$ et $(0, -10)$ avec $\lambda = 4e^{-10}$.

5. Nous avons :

$$100e^{-10} = f(0, -10) < f(0, 10) = 100e^{10},$$

donc la température minimale est $100e^{-10}$ et la température maximale est $100e^{10}$.

Corrigé d'exercice 2:

1. Nous avons :

$$\nabla \varphi_a(x, y) = \begin{bmatrix} 4(1-a)x^3 \\ 4(1+a)y^3 \end{bmatrix} \text{ et } \nabla \varphi_a(x, y) = \begin{bmatrix} 12(1-a)x^2 & 0 \\ 0 & 12(1+a)y^2 \end{bmatrix}$$

φ_a est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\nabla^2 \varphi_a(x, y)$ est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^2$ c'est à dire

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 \varphi_a(x, y)) = 144(1-a^2)x^2y^2 \geq 0, \\ \text{tr}(\nabla^2 \varphi_a(x, y)) = 12[(1-a)x^2 + (1+a)y^2] > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [-1, 1].$$

2. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ avec $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \Omega_1 \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 \geq 1 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \geq 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 \text{ est fermé.}$$

3. On pose $a = 1/2$. Nous avons : $\varphi_a(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 + 3y^4)$.

(a) Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_a(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^4}{2} (1 - 2\sin^2 \theta + 4\sin^4 \theta) = +\infty \Rightarrow \varphi_a \text{ est coercive.}$$

Car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - 2\sin^2(\theta) + 4\sin^4(\theta) > 0$.

(b) D'après la coercivité de φ_a et Ω_1 est fermé, alors le problème (P3) admet au moins une solution.

(c) On pose $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ x(x^2 - \mu) = 0, \\ y(3y^2 - \mu) = 0, \\ \mu(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu = 0$, alors $x^2 + y^2 > 1$ et $x = y = 0$ (impossible).

ii. Si $\mu > 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$. Nous avons :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\mu}, \\ y = 0 \text{ ou } y = \pm\sqrt{\mu/3}. \end{cases}$$

Les points sont $(0, \pm 1)$ avec $\mu = 3$, $(\pm 1, 0)$ avec $\mu = 1$ et $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2})$ avec $\mu = 3/4$.

(d) Nous avons :

$$\varphi_a(\pm 1, 0) = 1/2, \varphi_a(0, \pm 1) = 3/2 \text{ et } \varphi_a(\pm \sqrt{3}/2, \pm 1/2) = 3/8,$$

d'où les points $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$ sont solutions du problème (P3).

(e) Nous avons :

i. Pour les points $(0, \pm 1)$ et $\mu = 3$, nous avons :

$$\nabla^2 \varphi_a(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L(0, \pm 1, 3) = \nabla^2 \varphi_a(0, \pm 1) + 3\nabla^2 g(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$T^*(0, \pm 1, 3) = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = -6x^2 < 0,$$

d'où $(0, \pm 1)$ sont des points de maximum local strict de φ_a sur Ω_1 .

ii. Pour les points $(\pm 1, 0)$ et $\mu = 1$, nous avons :

$$\nabla^2 \varphi_a(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L(\pm 1, 0, 1) = \nabla^2 \varphi_a(\pm 1, 0) + \nabla^2 g(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T^*(\pm 1, 0, 1) = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$$

Pour tout $y \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = -2y^2 < 0,$$

d'où $(\pm 1, 0)$ sont des points de maximum local strict de φ_a sur Ω_1 .

4. On pose $a = 1$.

(a) D'après la question 1., la fonction φ_a est convexe. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(x_1, y_1) \in \Omega_2 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 \leq 1,$$

$$(x_2, y_2) \in \Omega_2 \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 \leq 1.$$

D'après la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, on a :

$$\begin{aligned} [(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 + [(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2]^2 &\leq (1 - \lambda)(x_1^2 + y_1^2) + \lambda(x_2^2 + y_2^2) \\ &\leq (1 - \lambda) + \lambda = 1, \end{aligned}$$

d'où Ω_2 est convexe.

(b) On pose $\varphi_a(x, y) = 2y^4$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Les conditions de KKT du problème (P4) sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ \mu x = 0, \\ y(4y^2 + \mu) = 0, \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu > 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ et $y = \pm 1$. Mais $\mu = -4 < 0$ (impossible).

ii. Si $\mu = 0$, alors $x^2 + y^2 < 1$, $y = 0$ et $x^2 < 1$. donc, les points sont donnés par l'ensemble suivant :

$$\{(x, 0) / x \in]-1, 1[\}$$