

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\nabla f_{\alpha}(x, y) = (2x - \alpha y + 3, 4y - \alpha x - 4)^T \text{ et } \nabla^2 f_{\alpha}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 4 \end{bmatrix}$$

f_{α} est convexe si et seulement si

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)) = 8 - \alpha^2 \geq 0, \\ \text{tr}(\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)) = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

2. On pose $h(x, y) = x + y - 3$. Alors, $\nabla h(x, y) = (1, 1)^T \neq 0$, donc tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.
3. On suppose que $|\alpha| \leq 2\sqrt{2}$.
- (a) Nous avons la fonction f_{α} est convexe d'après la question 1. et le domaine $\mathcal{C}$ est un droite donc convexe. Alors, le problème (1) est un problème d'optimisation convexe.
- (b) La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \alpha xy + 3x - 4y + \lambda(x + y - 3).$$

Alors, la condition de Lagrange :

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - \alpha x - 4 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \alpha y = -3 - \lambda, \\ -\alpha x + 4y = 4 - \lambda, \\ x + y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \alpha)x - (4 + \alpha)y = -7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$x = \frac{3\alpha + 5}{2\alpha + 6}, y = \frac{3\alpha + 13}{2\alpha + 6} \text{ et } \lambda = \frac{3\alpha^2 + \alpha - 28}{2\alpha + 6}.$$

D'après la condition suffisante d'optimalité de premier ordre la solution du problème (1) est $\left(\frac{3\alpha+5}{2\alpha+6}, \frac{3\alpha+13}{2\alpha+6}\right)$.

4. On pose $\alpha = 3$.
- (a) On pose $y = x$. Nous avons : $f_{\alpha}(x, x) = -x$. Alors $f_{\alpha}(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, c'est à dire f_{α} n'est pas coiercive.
- (b) La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 4y + \lambda(x + y - 3).$$

Alors, la condition de Lagrange :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - 3x - 4 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -3 - \lambda, \\ -3x + 4y = 4 - \lambda, \\ x + y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y = -7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Alors, on a $x = 7/6$, $y = 11/6$ et $\lambda = 1/6$. La matrice hessienne est donné par

$$\nabla^2 f_\alpha(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (0,5)$$

et l'espace tangent est donné par :

$$T^*(7/6, 11/6, 1/6) = \{(x, y) : Dh(7/6, 11/6)(x, y)^T = 0\} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \quad (0,5)$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = 12x^2 > 0. \quad (1)$$

Donc, le point $(7/6, 11/6)$ est un point de minimum local strict de f_α sur $\mathcal{C}$ c'est à dire est une solution locale stricte du problème (1). $(0,5)$

5. On pose $\alpha = -3$.

(a) On suppose que le problème (1) admet une solution noté par (x^*, y^*) . Alors, cette solution vérifiant la condition de Lagrange. Nous avons :

$$\begin{cases} 2x^* + 3y^* + 3 + \lambda = 0, \\ 4y^* + 3x^* - 4 + \lambda = 0, \\ x^* + y^* - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^* + 3y^* = -3 - \lambda, \\ 3x^* + 4y^* = 4 - \lambda, \\ x^* + y^* = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* + y^* = 7, \\ x^* + y^* = 3. \end{cases} \Rightarrow (\text{impossible}). \quad (0,5)$$

Alors, le problème (1) n'admet aucune solution.

Corrigé d'exercice 2:

1. La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$. Soit $(x_n, y_n) \in \mathcal{D}$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow 1 \leq x_n^2 + y_n^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq 4 \Rightarrow \mathcal{D} \text{ est fermé.} \quad (0,5)$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $1 \leq \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$. Alors, $\mathcal{D}$ est borné. Par conséquent, d'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes (P) et (Q) admettent au moins une solution globale. $(0,5)$

2. On pose $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Alors, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (P) sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \\ -2x + 2\mu_1 x - 2\mu_2 x = 0, \\ 1 + 2\mu_1 y - 2\mu_2 y = 0, \\ \mu_1 (x^2 + y^2 - 4) = 0, \\ \mu_2 (1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \\ (-1 + \mu_1 - \mu_2)x = 0, \\ 1 + 2(\mu_1 - \mu_2)y = 0, \\ \mu_1 (x^2 + y^2 - 4) = 0, \\ \mu_2 (1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases} \quad (1,25) \quad (2)$$

3. Pour résoudre le système (2), nous avons :

(a) Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, donc $1 < x^2 + y^2 < 4$. D'après équ. 2 de système de KKT, on obtient $1 = 0$, donc contradiction. $(0,25)$

(b) Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$, alors $x^2 + y^2 < 4$ et $x^2 + y^2 = 1$. le système de KKT devient :

$$\begin{cases} (1 + \mu_2)x = 0, \\ 1 - 2\mu_2 y = 0. \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1/2\mu_2 \Rightarrow \mu_2 = 1/2. \quad (0,25)$$

Alors, le point possible est $(0, 1)$. $(0,5)$

(c) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$, alors $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 > 1$. le système de KKT devient :

$$\begin{cases} (\mu_1 - 1)x = 0, \\ 1 + 2\mu_1 y = 0. \end{cases} \quad (0,25)$$

i. Si $\mu_1 = 1$, alors $y = -1/2$ et $x = \pm\sqrt{15}/2$. les points possible sont $(\sqrt{15}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{15}/2, -1/2)$. $(0,25)$

ii. Si $\mu_1 \neq 1$, alors $x = 0$ et $y = -1/2\mu_1$ et $\mu_1 = 1/4$. Alors, le point possible est $(0, -2)$. $(0,25)$

(d) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$, alors $1 = x^2 + y^2 = 4$, donc impossible. $(0,25)$

Nous avons :

$$f(0, 1) = 1, f(\pm\sqrt{15}/2, -1/2) = \frac{-17}{4} \text{ et } f(0, -2) = -2. \quad (0,25)$$

Alors, les points $(\sqrt{15}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{15}/2, -1/2)$ sont des solutions globales du problème (P) et le point $(0, 1)$ est la solution globale du problème (Q) . $(0,25)$

4. Pour le point $(0, -2)$ et $\mu_1 = 1/4$ et $\mu_2 = 0$. la matrice hessienne est donnée par :

$$L(0, -2, 1/4, 0) = \nabla^2 f(0, -2) + \frac{1}{4} \nabla^2 g_1(0, -2) = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (0,5)$$

L'espace tangent est donné par :

$$T^*(0, -2, 1/4) = \{(x, y) : Dg_1(0, -2)(x, y)^T = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}. \quad (0,5)$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-3}{2} x^2 < 0. \quad (0,75)$$

Alors, le point $(0, -2)$ est un point de maximum local strict de f sur $\mathcal{D}$. $(0,5)$