

Corrigé d'exercice 1:

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3$. Soient $(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C}$ telle que

$$(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est fermé.}$$

D'autre part, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est borné.}$$

D'après théorème de Weierstrass, la fonction f admet au moins un point de minimum global et un point de maximum global sur $\mathcal{C}$ c'est à dire les deux problèmes (P1) et (P2) admet des solutions globales.

2. On pose $h(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0$, alors tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 400xyz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

La condition de Lagrange est :

$$200yz^2 + \lambda x = 0, \quad (1)$$

$$200xz^2 + \lambda y = 0, \quad (2)$$

$$400xyz + \lambda z = 0, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (4)$$

4. Nous avons :

(a) Si $\lambda = 0$, alors les points possibles sont $\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$.

(b) Si $\lambda \neq 0$. En multipliant (1) par x et (2) par y et avec la différence on obtient

$$y^2 = x^2 \quad (5)$$

En multipliant (1) par $2x$ et (3) par z et avec la différence on obtient

$$z^2 = 2x^2 \quad (6)$$

en remplaçant (5) et (6) dans (4), on obtient

$$x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{ et } z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les points sont

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (1)$$

D'autre part, nous avons :

$$f(\pm 1, 0, 0) = f(0, \pm 1, 0) = f(0, 0, \pm 1) = 0, \quad (0,5)$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 50, \quad (0,5)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -50. \quad (0,5)$$

– Les solutions du problème (P_1) sont $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $(0,5)$

– Les solutions du problème (P_2) sont $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$. $(0,5)$

5. La température minimale est -50 et la température maximale est 50 .

$(0,25)$

$(0,25)$

Corrigé d'exercice 2:

1. Nous avons :

$$\nabla f(x, y, z) = (x - x_0, y, z - z_0)^T, \quad \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, $\nabla^2 f(x, y, z)$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ donc f est une fonction strictement convexe. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{C}$ est l'intersection d'une disque fermé et un plan donc $\mathcal{C}$ est convexe. par conséquent, le problème $(\mathcal{P})$ est convexe.

2. On pose $h(x, y, z) = x + z - 1$ et $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème $(\mathcal{P})$ sont données par :

$$\mu \geq 0, \quad (7)$$

$$x - x_0 + \lambda + 2\mu x = 0, \quad (8)$$

$$y + 2\mu y = 0, \quad (9)$$

$$z - z_0 + \lambda + 2\mu z = 0, \quad (10)$$

$$\mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \quad (11)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad (12)$$

$$x + z = 1. \quad (13)$$

Le problème $(\mathcal{P})$ est convexe, donc les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (7)-(13) sont des conditions nécessaires et suffisantes.

3. Soit $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^5$ un point qui satisfait les conditions KKT (7)-(13). D'après (7) et (9), nous avons $1 + 2\mu^* > 0$, alors $y^* = 0$.

4. On suppose que $\mu^* = 0$, avec (11) alors

$$(x^*)^2 + (z^*)^2 < 1. \quad (14)$$

(a) En utilisant (8), (10) et (13), on obtient :

$$\begin{cases} x^* = x_0 - \lambda^*, \\ z^* = z_0 - \lambda^*, \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 + 1), \\ z^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 + 1), \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1). \end{cases}$$

(b) En utilisant (14) et (15), on obtient :

$$|x_0 - z_0| < 1. \quad (16)$$

5. On suppose que $\mu^* > 0$, avec (11) on obtient :

$$(x^*)^2 + (z^*)^2 = 1. \quad (17)$$

(a) En utilisant (8) et (10), on trouve :

$$(1 + 2\mu^*)x^* = x_0 - \lambda^*, \quad (18)$$

$$(1 + 2\mu^*)z^* = z_0 - \lambda^*. \quad (19)$$

En sommant (18) et (19) et avec (13), on obtient :

$$1 + 2\mu^* = x_0 + z_0 - 2\lambda^*. \quad (20)$$

D'autre part, en utilisant (18), (19) et (17) on obtient :

$$(1 + 2\mu^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2. \quad (21)$$

En remplaçant (20) dans (21), on trouve :

$$(x_0 + z_0 - 2\lambda^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2. \quad (22)$$

(b) Avec simplification de l'équation (22), on obtient :

$$(\lambda^*)^2 - (x_0 + z_0)\lambda^* + x_0 z_0 = (\lambda^* - x_0)(\lambda^* - z_0) = 0 \Rightarrow \lambda^* = x_0 \text{ ou } \lambda^* = z_0.$$

(c) D'après (20), nous avons :

- Si $\lambda^* = x_0$, alors $\mu^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 - 1)$.

- Si $\lambda^* = z_0$, alors $\mu^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 - 1)$.

(d) Nous avons :

- Si $\lambda^* = x_0$, alors $x_0 - z_0 < -1$, $x^* = 0$ et $z^* = 1$.

- Si $\lambda^* = z_0$, alors $x_0 - z_0 > 1$, $x^* = 1$ et $z^* = 0$.

6. La solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par :

- Si $|x_0 - z_0| < 1$, alors

$$\begin{cases} x^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 + 1), \\ y^* = 0, \\ z^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 + 1), \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1), \\ \mu^* = 0. \end{cases}$$

- Si $x_0 - z_0 < -1$, alors

$$\begin{cases} x^* = 0, \\ y^* = 0, \\ z^* = 1, \\ \lambda^* = x_0, \\ \mu^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 - 1). \end{cases}$$

- Si $x_0 - z_0 > 1$, alors

$$\begin{cases} x^* = 1, \\ y^* = 0, \\ z^* = 0, \\ \lambda^* = z_0, \\ \mu^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 - 1). \end{cases}$$