

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, h_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2 \text{ et } h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

2. Nous avons :

(a) Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de D telle que $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Nous avons

$$\begin{cases} x_n + y_n + 2z_n = 0, \\ z_n = x_n^2 + y_n^2. \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z} = 0, \\ \bar{z} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2. \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in D \Rightarrow D \text{ fermé.}$$

(b) On suppose que D non borné, alors il existe une suite $(x_n, y_n, z_n) \in D$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}) \text{ et } z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} x_n + y_n + 2z_n = 2, \\ z_n = x_n^2 + y_n^2 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty = 2, \\ +\infty = \bar{x} + \bar{y} \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction.}$$

3. La fonction f continue sur un sous-ensemble fermé et borné D . D'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes (P1) et (P2) au moins une solution globale.

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\alpha \nabla h_1(x, y, z) + \beta \nabla h_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta x = 0, \\ \alpha + 2\beta y = 0, \\ 2\alpha - \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

d'où, tous les points de D sont réguliers.

5. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + 2z - 2) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ 2y + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \\ 2z + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 2\lambda_2)x = -\lambda_1, \\ (2 + 2\lambda_2)y = -\lambda_1, \\ z = \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1), \\ x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda_2 = -1$, alors $\lambda_1 = 0$ c'est à dire $z = -1/2$ impossible.

(b) Si $\lambda_2 \neq -1$, alors on a :

$$x = y = \frac{-\lambda_1}{2 + 2\lambda_2} \text{ et } z = \frac{1}{2} (\lambda_2 - 2\lambda_1).$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2\lambda_1}{2+2\lambda_2} + \lambda_2 - 2\lambda_1 = 2, \\ \frac{2\lambda_1^2}{(2+2\lambda_2)^2} = \frac{1}{2} (\lambda_2 - 2\lambda_1). \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0,$$

d'où $x_1 = -1$ et $x_2 = 1/2$. Nous avons $6 = f(-1, -1, 2) > f(1/2, 1/2, 1/2) = 3/4$.

- i. $(-1, -1, 2)$ est le point le plus éloigné de l'origine.
- ii. $(1/2, 1/2, 1/2)$ est le point le plus proche de l'origine.

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2r \cos \theta + 1.$$

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi(x,y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (r^2 - 2r \cos \theta + 1) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 - \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = +\infty,$$

d'où φ est coercive.

2. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \Omega_1 \Rightarrow 2\alpha x_n \leq y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\alpha \bar{x} \leq \bar{y}^2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 \text{ fermé.}$$

3. D'après la coercivité de la fonction φ et Ω_1 fermé, alors le problème (P3) admet au moins un point de minimum global.

4. On pose $g(x, y) = 2\alpha x - y^2$. Les conditions de KKT données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2(x-1) + 2\alpha\mu = 0, \\ 2y - 2\mu y = 0, \\ \mu(2\alpha x - y^2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ x = 1 - \alpha\mu, \\ (1 - \mu)y = 0, \\ \mu(2\alpha x - y^2) = 0. \end{cases}$$

(a) Si $\mu = 0$, alors $2\alpha x < y^2$ c'est à dire $x = 1$ et $y = 0$ mais $(1, 0) \notin \Omega_1$, donc impossible.

(b) Si $\mu > 0$, alors $2\alpha x = y^2$

i. Si $\mu \neq 1$, donc $x = y = 0$ et $\mu = 1/\alpha$.

ii. Si $\mu = 1$, donc $x = 1 - \alpha$ et $y = \pm \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)}$

Les points de KKT sont $(0, 0)$, $(1 - \alpha, \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ et $(1 - \alpha, -\sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$. D'autre part, les trois points de KKT sont actives et

$$\nabla g(x, y) = (2\alpha, -2y)^T \neq (0, 0),$$

d'où les trois points de KKT sont réguliers.

5. Nous avons :

$$\alpha(2 - \alpha) = f(1 - \alpha, \pm \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)}) < f(0, 0) = 1,$$

d'où, les deux points $(1 - \alpha, \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ et $(1 - \alpha, -\sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ sont des points de minimum global du problème (P3).

6. La matrice hessienne donnée par :

$$\nabla^2 \mathcal{L}(0, 0, 1/\alpha) = \nabla^2 \varphi(0, 0) + \frac{1}{\alpha} \nabla^2 g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Le point $(0, 0)$ est un point active et $\mu = 1/\alpha > 0$. Donc, on calcul l'espace tangent au point $(0, 0)$:

$$T^*(0, 0, 1/\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Dg(0, 0)(x, y) = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha} y^2 < 0,$$

donc, $(0, 0)$ est un point de maximum local strict de φ sur Ω_1 .

7. (a) Nous avons :

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La fonction φ est strictement convexe sur Ω_2 . D'autre part, soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2).$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 \geq y_1^2, \\ 2\alpha x_2 \geq y_2^2. \end{cases} \Rightarrow 2\alpha [(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2] \geq (1 - \lambda)y_1^2 + \lambda y_2^2 \geq [(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2]^2,$$

d'où $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \in \Omega_2$, donc Ω_2 convexe. Alors, le problème (P4) est convexe.

(b) Les conditions de KKT données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2(x - 1) - 2\alpha\mu = 0, \\ 2y + 2\mu y = 0, \\ \mu(y^2 - 2\alpha x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ x = 1 + \alpha\mu, \\ (1 + \mu)y = 0, \\ \mu(y^2 - 2\alpha x) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu = 0$, alors $y^2 < 2\alpha x$ et $x = 1$ et $y = 0$.

ii. Si $\mu > 0$, alors $y^2 = 2\alpha x$ et $x = y = 0$, mais $\mu = -1/\alpha$ impossible.

La solution du problème (P4) est le point $(1, 0)$.