

Exercice 1. (08pts). Soit une famille des cercles C_a définie par :

$$C_a := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1, \ a > 0 \right\}.$$

Pour déterminer les points de C_a les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(0, 0)$, on considère les problèmes d'optimisation suivants :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in C_a \end{cases} \quad \text{et} \quad (Q) : \begin{cases} \max f(x, y) \\ (x, y) \in C_a \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Montrer que les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.
2. Montrer que tous les points de C_a sont réguliers.
3. Résoudre les deux problèmes (P) et (Q) .
4. Si $a < 0$ et sans calcul, déduire les solutions des problèmes (P) et (Q) .
5. Calculer la distance minimale et la distance maximale entre le point A et le cercle C_a quand $a \rightarrow 0$.

Exercice 2. (12pts). Soit $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $\varphi_\alpha(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha xy$ où α est un paramètre réel. On considère les deux problèmes d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(1) : \begin{cases} \max \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \end{cases}, \quad (2) : \begin{cases} \min \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

où $\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$ et $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

1. Pour quelles valeurs de α , φ_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
2. On pose $\alpha = -2$.
 - (a) Montrer que la fonction φ n'est pas coercive.
 - (b) Montrer que le sous-ensemble Ω_1 n'est pas borné.
 - (c) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (1).
 - (d) Montrer que le problème (1) n'admet aucune solution.
3. On pose $\alpha = 2$.
 - (a) Montrer que le problème (2) est convexe.
 - (b) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (2).
 - (c) Résoudre le problème (2).
4. On pose $\alpha = 4\sqrt{2}/3$. Soit le problème d'optimisation suivant :

$$(3) : \begin{cases} \min \varphi_\alpha(x, y) \\ (x, y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2. \end{cases}$$

- (a) Montrer que le problème (3) est équivalent le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(4) : \begin{cases} \min \phi_\alpha(x) = x^4 + \alpha x^3 + x^2 \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (b) Résoudre le problème (4).
- (c) Déduire la solution du problème (3).

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

(a) Soit $(x_n, y_n) \in C_a$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors, on a :

$$(x_n - a)^2 + (y_n - a)^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - a)^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in C_a,$$

d'où C_a est fermé.

(b) Soit $(x, y) \in C_a$. Nous avons :

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - 2a^2 + 2a(x + y), \\ x \leq 1 + a, \\ y \leq 1 + a, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2a^2 + 4a + 1.$$

Donc, il existe $M = \sqrt{2a^2 + 4a + 1}$ tel que $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M$, d'où C_a est borné.

D'autre part, la fonction f est continue sur C_a . Alors, d'après théorème de Weierstrass les problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.

2. On pose $h(x, y) = (x - a)^2 + (y - a)^2 - 1$. Nous avons :

$$\forall (x, y) \in C_a : \nabla h(x, y) = (2x - 2a, 2y - 2a)^T \neq 0 \Rightarrow \text{tous les points de } C_a \text{ sont réguliers.}$$

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left((x - a)^2 + (y - a)^2 - 1 \right).$$

La condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x - 2a) = 0, \\ 2y + \lambda(2y - 2a) = 0, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda)x = a\lambda, \\ (1 + \lambda)y = a\lambda, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda = -1 \Rightarrow a = 0$ impossible.

(b) Si $\lambda \neq -1$, nous avons $x = y = a\lambda / (1 + \lambda)$, donc $\lambda_1 = a\sqrt{2} - 1$ et $\lambda_2 = -a\sqrt{2} - 1$. Les points sont

$$\left\{ \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Nous avons $f\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 1 < f\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1$. Alors,

- $\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est la solution du problème (P).

- $\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est la solution du problème (Q).

4. Si $a < 0$, nous avons : $f\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 1 > f\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1$. Alors,

- $\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ solution du problème (P).

- $\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ solution du problème (Q).

5. Quand $a \rightarrow 0$, le point A devient le centre du cercle C_a . Donc,

$$\text{La distance minimale} = \text{La distance maximale} = 1.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

$$\nabla \varphi_\alpha(x, y) = (2x + \alpha y, 2y + \alpha x)^T, \quad \nabla^2 \varphi_\alpha(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

La fonction φ_α est convexe si $\text{tr}(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, y)) = 4$ et $\det(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, y)) = 4 - \alpha^2 \geq 0$. Donc, les valeurs de $\alpha \in [-2, 2]$.

2. On pose $\alpha = -2$.

(a) Soit $y = x$. Nous avons $\varphi(x, x) = 0$, d'où φ_α n'est pas coercive.

(b) On suppose que Ω_1 est borné. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ telle que $x_n = 1 + 1/n$ et $y_n = -e^n$. Nous avons :

$$x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \Omega_1 \text{ n'est pas borné.}$$

(c) On pose $g(x, y) = y - x^2$. Les conditions de KKT sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ -2x + 2y - 2\mu x = 0, \\ -2y + 2x + \mu = 0, \\ \mu(y - x^2) = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu = 0$, donc $y < x^2$ et $y = x$, alors les points de KKT sont $\{(x, x) / x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\}$.

ii. Si $\mu > 0$, donc $y = x^2$ et $x = 1/2$, donc $y = 1/4$ et $\mu = -1/2$, alors impossible.

(d) La contrainte est non active au point (x, x) pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. D'autre part, nous avons :

$$\text{tr}(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)) = 4 \text{ et } \det(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)) = 0,$$

d'où $\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)$ est semi-définie positive. D'après la condition nécessaire d'optimalité de seconde ordre, le problème (1) n'admet aucune solution.

3. On pose $\alpha = 2$. Nous avons :

(a) D'après la question 1. la fonction φ_α est convexe. Reste à montrer que Ω_2 est convexe. Soient $(x, y), (x', y') \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$, avec la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, nous avons :

$$(1 - \lambda)y + \lambda y' \geq (1 - \lambda)x^2 + \lambda (x')^2 \geq [(1 - \lambda)x + \lambda x']^2.$$

Par conséquent, $[(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y'] = (1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in \Omega_2$, d'où Ω_2 est convexe.

(b) On pose $g(x, y) = x^2 - y$. Les conditions de KKT du problème (2) sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x + 2y + 2\mu x = 0, \\ 2y + 2x - \mu = 0, \\ \mu(x^2 - y) = 0. \end{cases}$$

(c) Nous avons :

i. Si $\mu = 0$, alors $y > x^2$ et $y = -x$, alors les points de KKT sont $\{(x, -x) / x \in]-1, 0[\}$.

ii. Si $\mu > 0$, alors $y = x^2$ et $x = -1/2$, donc $y = 1/4$ et $\mu = -1/2$, alors impossible.

Par conséquent, le problème (2) est convexe, donc les points $\{(x, -x) / x \in]-1, 0[\}$ sont des solutions globales du problème (2).

4. On pose $\alpha = 4\sqrt{2}/3$.

(a) Soit (x, y) une solution du problème (3). En remplaçant la contrainte $y = x^2$ dans l'équation objective φ_α , on obtient la fonction ϕ_α . Réciproquement, on pose $y = x^2$ dans la fonction ϕ_α , on obtient (3).

(b) Nous avons :

$$\phi'_\alpha(x) = 4x^3 + 4\sqrt{2}x^2 + 2x = 4x \left(x + \sqrt{2}/2\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{2}/2.$$

La dérivée seconde de ϕ_α est donnée par $\phi''_\alpha(x) = 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 2$.

- i. Pour $x = 0$, $\phi''_\alpha(0) = 2 > 0$, alors $x = 0$ est un point de minimum local strict.
- ii. Pour $x = -\sqrt{2}/2$, $\phi''_\alpha(-\sqrt{2}/2) = 0$, alors $x = -\sqrt{2}/2$ est un point d'inflexion.

Par conséquent, $x = 0$ est une solution locale strict du problème (4).

(c) La solution du problème (3) est le point $(0, 0)$.