

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\nabla f_{\alpha}(x, y) = (2x - \alpha y + 3, 4y - \alpha x - 4)^T \text{ et } \nabla^2 f_{\alpha}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 4 \end{bmatrix}$$

f_{α} est convexe si et seulement si

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)) = 8 - \alpha^2 \geq 0, \\ \text{tr}(\nabla^2 f_{\alpha}(x, y)) = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}].$$

2. On pose $h(x, y) = x + y - 3$. Alors, $\nabla h(x, y) = (1, 1)^T \neq 0$, donc tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

3. On suppose que $|\alpha| \leq 2\sqrt{2}$.

(a) Nous avons la fonction f_{α} est convexe d'après la question 1. et le domaine $\mathcal{C}$ est un droite donc convexe. Alors, le problème (1) est un problème d'optimisation convexe.

(b) La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \alpha xy + 3x - 4y + \lambda(x + y - 3).$$

Alors, la condition de Lagrange :

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - \alpha x - 4 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \alpha y = -3 - \lambda, \\ -\alpha x + 4y = 4 - \lambda, \\ x + y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \alpha)x - (4 + \alpha)y = -7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$x = \frac{3\alpha + 5}{2\alpha + 6}, y = \frac{3\alpha + 13}{2\alpha + 6} \text{ et } \lambda = \frac{3\alpha^2 + \alpha - 28}{2\alpha + 6}.$$

D'après la condition suffisante d'optimalité de premier ordre la solution du problème (1) est $\left(\frac{3\alpha+5}{2\alpha+6}, \frac{3\alpha+13}{2\alpha+6}\right)$.

4. On pose $\alpha = 3$.

(a) On pose $y = x$. Nous avons : $f_{\alpha}(x, x) = -x$. Alors $f_{\alpha}(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, c'est à dire f_{α} n'est pas coiercive.

(b) La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 4y + \lambda(x + y - 3).$$

Alors, la condition de Lagrange :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - 3x - 4 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -3 - \lambda, \\ -3x + 4y = 4 - \lambda, \\ x + y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y = -7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Alors, on a $x = 7/6$, $y = 11/6$ et $\lambda = 1/6$. La matrice hessienne est donné par

$$\nabla^2 f_{\alpha}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

et l'espace tangent est donné par :

$$T^*(7/6, 11/6, 1/6) = \{(x, y) : Dh(7/6, 11/6)(x, y)^T = 0\} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = 12x^2 > 0.$$

Donc, le point $(7/6, 11/6)$ est un point de minimum local strict de f_{α} sur $\mathcal{C}$ c'est à dire est un solution locale stricte du problème (1).

5. On pose $\alpha = -3$.

- (a) On suppose que le problème (1) admet une solution noté par (x^*, y^*) . Alors, cette solution vérifiant la condition de Lagrange. Nous avons :

$$\begin{cases} 2x^* + 3y^* + 3 + \lambda = 0, \\ 4y^* + 3x^* - 4 + \lambda = 0, \\ x^* + y^* - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^* + 3y^* = -3 - \lambda, \\ 3x^* + 4y^* = 4 - \lambda, \\ x^* + y^* = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* + y^* = 7, \\ x^* + y^* = 3. \end{cases} \Rightarrow (\text{impossible}).$$

Alors, le problème (1) n'admet aucune solution.

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

$$\nabla \varphi_\alpha(x, y) = (2x + \alpha y, 2y + \alpha x)^T, \quad \nabla^2 \varphi_\alpha(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

La fonction φ_α est convexe si $\text{tr}(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, y)) = 4$ et $\det(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, y)) = 4 - \alpha^2 \geq 0$. Donc, les valeurs de $\alpha \in [-2, 2]$.

2. On pose $\alpha = -2$.

- (a) Soit $y = x$. Nous avons $\varphi(x, x) = 0$, d'où φ_α n'est pas coercive.
(b) On suppose que Ω_1 est borné. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ telle que $x_n = 1 + 1/n$ et $y_n = -e^n$. Nous avons :

$$x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \Omega_1 \text{ n'est pas borné.}$$

- (c) On pose $g(x, y) = y - x^2$. Les conditions de KKT sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ -2x + 2y - 2\mu x = 0, \\ -2y + 2x + \mu = 0, \\ \mu(y - x^2) = 0. \end{cases}$$

- i. Si $\mu = 0$, donc $y < x^2$ et $y = x$, alors les points de KKT sont $\{(x, x) / x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\}$.
ii. Si $\mu > 0$, donc $y = x^2$ et $x = 1/2$, donc $y = 1/4$ et $\mu = -1/2$, alors impossible.
(d) La contrainte est non active au point (x, x) pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. D'autre part, nous avons :

$$\text{tr}(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)) = 4 \text{ et } \det(\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)) = 0,$$

d'où $\nabla^2 \varphi_\alpha(x, x)$ est semi-définie positive. D'après la condition nécessaire d'optimalité de seconde ordre, le problème (1) n'admet aucune solution.

3. On pose $\alpha = 2$. Nous avons :

- (a) D'après la question 1. la fonction φ_α est convexe. Reste à montrer que Ω_2 est convexe. Soient $(x, y), (x', y') \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$, avec la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, nous avons :

$$(1 - \lambda)y + \lambda y' \geq (1 - \lambda)x^2 + \lambda(x')^2 \geq [(1 - \lambda)x + \lambda x']^2.$$

Par conséquent, $[(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y'] = (1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in \Omega_2$, d'où Ω_2 est convexe.

- (b) On pose $g(x, y) = x^2 - y$. Les conditions de KKT du problème (2) sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2x + 2y + 2\mu x = 0, \\ 2y + 2x - \mu = 0, \\ \mu(x^2 - y) = 0. \end{cases}$$

(c) Nous avons :

- i. Si $\mu = 0$, alors $y > x^2$ et $y = -x$, alors les points de KKT sont $\{(x, -x) / x \in]-1, 0[\}$.
ii. Si $\mu > 0$, alors $y = x^2$ et $x = -1/2$, donc $y = 1/4$ et $\mu = -1/2$, alors impossible.

Par conséquent, le problème (2) est convexe, donc les points $\{(x, -x) / x \in]-1, 0[\}$ sont des solutions globales du problème (2).

4. On pose $\alpha = 4\sqrt{2}/3$.

-
- (a) Soit (x, y) une solution du problème (3). En remplaçant la contrainte $y = x^2$ dans l'équation objective φ_α , on obtient la fonction ϕ_α . Réciproquement, on pose $y = x^2$ dans la fonction ϕ_α , on obtient (3).
- (b) Nous avons :

$$\phi'_\alpha(x) = 4x^3 + 4\sqrt{2}x^2 + 2x = 4x \left(x + \sqrt{2}/2 \right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{2}/2.$$

La dérivée seconde de ϕ_α est donnée par $\phi''_\alpha(x) = 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 2$.

- i. Pour $x = 0$, $\phi''_\alpha(0) = 2 > 0$, alors $x = 0$ est un point de minimum local strict.
- ii. Pour $x = -\sqrt{2}/2$, $\phi''_\alpha(-\sqrt{2}/2) = 0$, alors $x = -\sqrt{2}/2$ est un point d'inflexion.

Par conséquent, $x = 0$ est une solution locale strict du problème (4).

- (c) La solution du problème (3) est le point $(0, 0)$.