

Corrigé d'exercice 1: 1. Nous avons :

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2r \cos \theta + 1.$$

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi(x,y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (r^2 - 2r \cos \theta + 1) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 - \frac{2 \cos \theta}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = +\infty,$$

d'où φ est coercive.

2. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \Omega_1 \Rightarrow 2\alpha x_n \leq y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\alpha \bar{x} \leq \bar{y}^2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 \text{ fermé.}$$

3. D'après la coercivité de la fonction φ et Ω_1 fermé, alors le problème (P3) admet au moins un point de minimum global.

4. On pose $g(x, y) = 2\alpha x - y^2$. Les conditions de KKT données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ 2(x-1) + 2\alpha\mu = 0, \\ 2y - 2\mu y = 0, \\ \mu(2\alpha x - y^2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq 0, \\ x = 1 - \alpha\mu, \\ (1 - \mu)y = 0, \\ \mu(2\alpha x - y^2) = 0. \end{cases}$$

(a) Si $\mu = 0$, alors $2\alpha x < y^2$ c'est à dire $x = 1$ et $y = 0$ mais $(1, 0) \notin \Omega_1$, donc impossible.

(b) Si $\mu > 0$, alors $2\alpha x = y^2$

i. Si $\mu \neq 1$, donc $x = y = 0$ et $\mu = 1/\alpha$.

ii. Si $\mu = 1$, donc $x = 1 - \alpha$ et $y = \pm \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)}$

Les points de KKT sont $(0, 0)$, $(1 - \alpha, \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ et $(1 - \alpha, -\sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$. D'autre part, les trois points de KKT sont actives et

$$\nabla g(x, y) = (2\alpha, -2y)^T \neq (0, 0),$$

d'où les trois points de KKT sont réguliers.

5. Nous avons :

$$\alpha(2 - \alpha) = f(1 - \alpha, \pm \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)}) < f(0, 0) = 1,$$

d'où, les deux points $(1 - \alpha, \sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ et $(1 - \alpha, -\sqrt{2\alpha(1 - \alpha)})$ sont des points de minimum global du problème (P3).

6. La matrice hessienne donnée par :

$$\nabla^2 \mathcal{L}(0, 0, 1/\alpha) = \nabla^2 \varphi(0, 0) + \frac{1}{\alpha} \nabla^2 g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Le point $(0, 0)$ est un point active et $\mu = 1/\alpha > 0$. Donc, on calcul l'espace tangent au point $(0, 0)$:

$$T^*(0, 0, 1/\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Dg(0, 0)(x, y) = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha} y^2 < 0,$$

donc, $(0, 0)$ est un point de maximum local strict de φ sur Ω_1 .

Corrigé d'exercice 2:

1. La modélisation de ce problème est :

$$\begin{cases} \min g(x, y) = 4.10^5(10 - y) + 5.10^5x, \\ h(x, y) = x^2 - y^2 - 9, \\ g_1(x, y) = -x \leq 0, \\ g_2(x, y) = 3 - y \leq 0, \\ g_3(x, y) = y - 10 \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

2. Soient $(x_n, y_n) \in \Omega$. Alors, nous avons :

$$x_n^2 - y_n^2 - 9 = 0 \text{ et } x_n \geq 0 \text{ et } 3 \leq y_n \leq 10.$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $(x, y) \in \Omega$ d'où Ω est fermé.

D'autre part, nous avons :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2y^2 + 9}.$$

Donc, on a :

$$\forall (x, y) \in \Omega, 3\sqrt{3} \leq \|(x, y)\| \leq \sqrt{209},$$

d'où Ω est borné.

3. La fonction g est continue sur Ω et Ω est fermé et borné. donc, avec le théorème de Weierstrass, le problème d'optimisation (13) admet une solution globale c'est à dire un point de minimum global.
4. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, -2y)^T \neq 0$ puisque $y \geq 0$, donc tous les points de Ω sont réguliers.
5. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont :

$$5.10^5 + 2\lambda x - \mu_1 = 0, \quad (3)$$

$$-4.10^5 - 2\lambda y - \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad (4)$$

$$x^2 - y^2 = 9, \quad (5)$$

$$x \geq 0, \quad (6)$$

$$3 \leq y \leq 10, \quad (7)$$

$$\mu_1 x = 0, \quad (8)$$

$$\mu_2 (3 - y) = 0, \quad (9)$$

$$\mu_3 (y - 10) = 0. \quad (10)$$

6. Nous avons :

- (a) On suppose que $\mu_1 > 0$, implique que $x = 0$ donc $y^2 = -9$, ce qui est impossible. Alors, $\mu_1 = 0$ et $x > 0$.
- (b) On suppose que $\mu_2 > 0$, implique que $y = 3$ donc $x = 3\sqrt{2}$ et $\lambda = -\frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}$, $\mu_3 = 0$, $\mu_2 = -4.10^5 + \frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}.3 < 0$ ce qui est impossible. Donc, $\mu_2 = 0$ et $y > 3$.

(c) On suppose que $\mu_3 > 0$, implique que $y = 10$, donc $x = \sqrt{109}$, $\lambda = -\frac{5 \cdot 10^5}{2\sqrt{109}}$ et $\mu_3 = 4 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{5 \cdot 10^5}{2\sqrt{109}} < 0$, ce qui est impossible. Donc, $\mu_3 = 0$ et $y < 10$.

Finalement, $\lambda \neq 0$ nécessairement, puis $x = -\frac{5 \cdot 10^5}{2\lambda}$ et $y = -\frac{4 \cdot 10^5}{2\lambda}$. Puisque $x^2 - y^2 = 9$, il vient $\lambda = -\frac{10^5}{2}$. Ainsi,

$$x = 5 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

7. le coût optimal de l'autoroute est donné par :

$$g(4, 5) = 24 \cdot 10^5 + 25 \cdot 10^5 = 4900000\$.$$

Corrigé d'exercice 3: 1. Nous avons :

(a) φ est continue sur C .

(b) Montrons que C est fermé : soit $(x_n, y_n) \in C$ avec $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Donc, on a :

$$x_n \geq 0; y_n \geq 0; x_n + 2y_n \geq a \Rightarrow \bar{x} \geq 0; \bar{y} \geq 0; \bar{x} + 2\bar{y} \geq a \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in C.$$

(c) Montrons que C est borné : on suppose que C n'est pas borné. alors il existe $(x_n, y_n) \in C$ telle que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$x_n + 2y_n \leq a \Rightarrow +\infty \leq a \text{ impossible.}$$

D'après théorème de Weierstrass, le problème (10) admet au moins une solution globale.

2. On suppose que $y^* = 0$, alors $\varphi(x^*, 0) = 0$. D'autre part, x^* représente un travail salarié et y^* représente une quantité des engrais, donc $\varphi(x^*, y^*) > 0$ d'où contradiction. Alors, $y^* > 0$.

3. Nous avons :

$$\nabla \varphi(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{y^*}{2\sqrt{(1000+x^*)y^*}} \\ \frac{1000+x^*}{2\sqrt{(1000+x^*)y^*}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} \end{bmatrix}$$

4. On pose $f(x, y) = -\varphi(x, y)$, $g_1(x, y) = -x$, $g_2(x, y) = -y$ et $g_3(x, y) = x + 2y - a$. Alors, Les conditions d'optimalités de KKT sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} - \mu_1 + \mu_3 = 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} - \mu_2 + 2\mu_3 = 0, \\ \mu_1 x^* = 0, \\ \mu_2 y^* = 0, \\ \mu_3 (x^* + 2y^* - a) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

D'après la question 2., nous avons $y^* > 0$, donc $\mu_2 = 0$. Le système (11) devient :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_3 \geq 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} - \mu_1 + \mu_3 = 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}} + 2\mu_3 = 0, \\ \mu_1 x^* = 0, \\ \mu_3 (x^* + 2y^* - a) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Nous avons :

$$\mu_3 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1000 + x^*}{y^*}} > 0 \Rightarrow x^* + 2y^* = a.$$

Le système (12) devient ($\mu = \mu_1$) :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = -2\mu + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ \mu x^* = 0, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases}$$

5. On pose $a = 500$ €. Nous avons

(a) Nous avons :

$$\nabla g_3(x, y) = (1, 2)^T \neq 0 \Rightarrow (x^*, y^*) \text{ est un point régulier.}$$

(b) Si $\mu = 0$, alors $x^* > 0$. Nous avons :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y^*}{1000+x^*}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000+x^*}{y^*}}, \\ x^* + 2y^* = 500. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^* - x^* = 1000, \\ x^* + 2y^* = 500 \end{cases} \Leftrightarrow x_* = -250 \text{ impossible.}$$

Si $\mu > 0$, alors $x^* = 0$, donc $y^* = 250$ et $\mu = 1/2$. la solution globale du problème (10) est le point $(0, 250)$.

(c) La quantité de blé produite est donnée par :

$$\varphi(0, 250) = 500.$$

6. L'agriculteur fasse appel à de la main d'œuvre, alors $x^* > 0$ donc $\mu = 0$. Nous avons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2y^* - x^* = 1000, \\ x^* + 2y^* = a. \end{cases} \Rightarrow x^* = \frac{a - 1000}{2} > 0 \text{ et } y^* = \frac{a + 1000}{4}.$$

Donc, la valeur minimale de a est $a = 1001$ €.

Corrigé d'exercice 4: 1. Nous avons :

$$\nabla \varphi_a(x, y) = \begin{bmatrix} 4(1-a)x^3 \\ 4(1+a)y^3 \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 \varphi_a(x, y) = \begin{bmatrix} 12(1-a)x^2 & 0 \\ 0 & 12(1+a)y^2 \end{bmatrix}$$

φ_a est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\nabla^2 \varphi_a(x, y)$ est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^2$ c'est à dire

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 \varphi_a(x, y)) = 144(1-a^2)x^2y^2 \geq 0, \\ \text{tr}(\nabla^2 \varphi_a(x, y)) = 12[(1-a)x^2 + (1+a)y^2] > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [-1, 1].$$

2. Soit $(x_n, y_n) \in \Omega_1$ avec $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$. Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \Omega_1 \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 \geq 1 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \geq 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1 \text{ est fermé.}$$

3. On pose $a = 1/2$. Nous avons : $\varphi_a(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 + 3y^4)$.

(a) Nous avons :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \varphi_a(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^4}{2} (1 - 2\sin^2 + 4\sin^4 \theta) = +\infty \Rightarrow \varphi_a \text{ est coercive.}$$

Car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - 2\sin^2(\theta) + 4\sin^4(\theta) > 0$.

- (b) D'après la coercivité de φ_a et Ω_1 est fermé, alors le problème (P3) admet au moins une solution.
(c) On pose $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ x(x^2 - \mu) = 0, \\ y(3y^2 - \mu) = 0, \\ \mu(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

- i. Si $\mu = 0$, alors $x^2 + y^2 > 1$ et $x = y = 0$ (impossible).
ii. Si $\mu > 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$. Nous avons :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\mu}, \\ y = 0 \text{ ou } y = \pm\sqrt{\mu/3}. \end{cases}$$

Les points sont $(0, \pm 1)$ avec $\mu = 3$, $(\pm 1, 0)$ avec $\mu = 1$ et $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2})$ avec $\mu = 3/4$.

- (d) Nous avons :

$$\varphi_a(\pm 1, 0) = 1/2, \quad \varphi_a(0, \pm 1) = 3/2 \text{ et } \varphi_a(\pm \sqrt{3}/2, \pm 1/2) = 3/8,$$

d'où les points $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$ sont solutions du problème (P3).

- (e) Nous avons :

- i. Pour les points $(0, \pm 1)$ et $\mu = 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_a(0, \pm 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ L(0, \pm 1, 3) &= \nabla^2 \varphi_a(0, \pm 1) + 3\nabla^2 g(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \\ T^*(0, \pm 1, 3) &= \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = -6x^2 < 0,$$

d'où $(0, \pm 1)$ sont des points de maximum local strict de φ_a sur Ω_1 .

- ii. Pour les points $(\pm 1, 0)$ et $\mu = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_a(\pm 1, 0) &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ L(\pm 1, 0, 1) &= \nabla^2 \varphi_a(\pm 1, 0) + \nabla^2 g(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ T^*(\pm 1, 0, 1) &= \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Pour tout $y \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = -2y^2 < 0,$$

d'où $(\pm 1, 0)$ sont des points de maximum local strict de φ_a sur Ω_1 .

4. On pose $a = 1$.

- (a) D'après la question 1., la fonction φ_a est convexe. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega_2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \in \Omega_2 &\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 \leq 1, \\ (x_2, y_2) \in \Omega_2 &\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 \leq 1.\end{aligned}$$

D'après la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, on a :

$$\begin{aligned}[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 + [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2]^2 &\leq (1-\lambda)(x_1^2 + y_1^2) + \lambda(x_2^2 + y_2^2) \\ &\leq (1-\lambda) + \lambda = 1,\end{aligned}$$

d'où Ω_2 est convexe.

- (b) On pose $\varphi_a(x, y) = 2y^4$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Les conditions de KKT du problème (P4) sont données par :

$$\begin{cases} \mu \geq 0, \\ \mu x = 0, \\ y(4y^2 + \mu) = 0, \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

- i. Si $\mu > 0$, alors $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ et $y = \pm 1$. Mais $\mu = -4 < 0$ (impossible).
- ii. Si $\mu = 0$, alors $x^2 + y^2 < 1$, $y = 0$ et $x^2 < 1$. donc, les points sont donnés par l'ensemble suivant :

$$\{(x, 0) / x \in]-1, 1[\}.$$

Corrigé d'exercice 5:

1. Nous avons :

$$\nabla f(x, y, z) = (x - x_0, y, z - z_0)^T, \quad \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, $\nabla^2 f(x, y, z)$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ donc f est une fonction strictement convexe. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{C}$ est l'intersection d'une disque fermé et un plan donc $\mathcal{C}$ est convexe. par conséquent, le problème (P) est convexe.

2. On pose $h(x, y, z) = x + z - 1$ et $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (P) sont données par :

$$\mu \geq 0, \tag{13}$$

$$x - x_0 + \lambda + 2\mu x = 0, \tag{14}$$

$$y + 2\mu y = 0, \tag{15}$$

$$z - z_0 + \lambda + 2\mu z = 0, \tag{16}$$

$$\mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \tag{17}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \tag{18}$$

$$x + z = 1. \tag{19}$$

Le problème (P) est convexe, donc les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (13)-(19) sont des conditions nécessaires et suffisantes.

3. Soit $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^5$ un point qui satisfait les conditions KKT (13)-(19). D'après (13) et (15), nous avons $1 + 2\mu^* > 0$, alors $y^* = 0$.
4. On suppose que $\mu^* = 0$, avec (17) alors

$$(x^*)^2 + (z^*)^2 < 1. \tag{20}$$

(a) En utilisant (14), (16) et (19), on obtient :

$$\begin{cases} x^* = x_0 - \lambda^*, \\ z^* = z_0 - \lambda^*, \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 + 1), \\ z^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 + 1), \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1). \end{cases} \quad (21)$$

(b) En utilisant (20) et (21), on obtient :

$$|x_0 - z_0| < 1. \quad (22)$$

5. On suppose que $\mu^* > 0$, avec (17) on obtient :

$$(x^*)^2 + (z^*)^2 = 1. \quad (23)$$

(a) En utilisant (14) et (16), on trouve :

$$(1 + 2\mu^*)x^* = x_0 - \lambda^*, \quad (24)$$

$$(1 + 2\mu^*)z^* = z_0 - \lambda^*. \quad (25)$$

En sommant (24) et (25) et avec (19), on obtient :

$$1 + 2\mu^* = x_0 + z_0 - 2\lambda^*. \quad (26)$$

D'autre part, en utilisant (24), (25) et (23) on obtient :

$$(1 + 2\mu^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2. \quad (27)$$

En remplaçant (26) dans (27), on trouve :

$$(x_0 + z_0 - 2\lambda^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2. \quad (28)$$

(b) Avec simplification de l'équation (28), on obtient :

$$(\lambda^*)^2 - (x_0 + z_0)\lambda^* + x_0z_0 = (\lambda^* - x_0)(\lambda^* - z_0) = 0 \Rightarrow \lambda^* = x_0 \text{ ou } \lambda^* = z_0.$$

(c) D'après (26), nous avons :

$$\text{— Si } \lambda^* = x_0, \text{ alors } \mu^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 - 1).$$

$$\text{— Si } \lambda^* = z_0, \text{ alors } \mu^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 - 1).$$

(d) Nous avons :

$$\text{— Si } \lambda^* = x_0, \text{ alors } x_0 - z_0 < -1, x^* = 0 \text{ et } z^* = 1.$$

$$\text{— Si } \lambda^* = z_0, \text{ alors } x_0 - z_0 > 1, x^* = 1 \text{ et } z^* = 0.$$

6. La solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par :

— Si $|x_0 - z_0| < 1$, alors

$$\begin{cases} x^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 + 1), \\ y^* = 0, \\ z^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 + 1), \\ \lambda^* = \frac{1}{2}(x_0 + z_0 - 1), \\ \mu^* = 0. \end{cases}$$

— Si $x_0 - z_0 < -1$, alors

$$\begin{cases} x^* = 0, \\ y^* = 0, \\ z^* = 1, \\ \lambda^* = x_0, \\ \mu^* = \frac{1}{2}(z_0 - x_0 - 1). \end{cases}$$

— Si $x_0 - z_0 > 1$, alors

$$\begin{cases} x^* = 1, \\ y^* = 0, \\ z^* = 0, \\ \lambda^* = z_0, \\ \mu^* = \frac{1}{2}(x_0 - z_0 - 1). \end{cases}$$

Corrigé d'exercice 6:

1. La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$. Soit $(x_n, y_n) \in \mathcal{D}$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow 1 \leq x_n^2 + y_n^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq 4 \Rightarrow \mathcal{D} \text{ est fermé.}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $1 \leq \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$. Alors, $\mathcal{D}$ est borné. Par conséquent, d'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes (P) et (Q) admettent au moins une solution globale.

2. On pose $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Alors, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker du problème (P) sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \\ -2x + 2\mu_1 x - 2\mu_2 x = 0, \\ 1 + 2\mu_1 y - 2\mu_2 y = 0, \\ \mu_1 (x^2 + y^2 - 4) = 0, \\ \mu_2 (1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \\ (-1 + \mu_1 - \mu_2)x = 0, \\ 1 + 2(\mu_1 - \mu_2)y = 0, \\ \mu_1 (x^2 + y^2 - 4) = 0, \\ \mu_2 (1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

3. Pour résoudre le système (29), nous avons :

(a) Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, donc $1 < x^2 + y^2 < 4$. D'après equ. 2 de système de KKT, on obtient $1 = 0$, donc contradiction.

(b) Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$, alors $x^2 + y^2 < 4$ et $x^2 + y^2 = 1$. le système de KKT devient :

$$\begin{cases} (1 + \mu_2)x = 0, \\ 1 - 2\mu_2 y = 0. \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1/2\mu_2 \Rightarrow \mu_2 = 1/2.$$

Alors, le point possible est $(0, 1)$.

(c) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$, alors $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 > 1$. le système de KKT devient :

$$\begin{cases} (\mu_1 - 1)x = 0, \\ 1 + 2\mu_1 y = 0. \end{cases}$$

i. Si $\mu_1 = 1$, alors $y = -1/2$ et $x = \pm\sqrt{15}/2$. les points possible sont $(\sqrt{15}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{15}/2, -1/2)$.

ii. Si $\mu_1 \neq 1$, alors $x = 0$ et $y = -1/2\mu_1$ et $\mu_1 = 1/4$. Alors, le point possible est $(0, -2)$.

(d) Si $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$, alors $1 = x^2 + y^2 = 4$, donc impossible.

Nous avons :

$$f(0, 1) = 1, f(\pm\sqrt{15}/2, -1/2) = \frac{-17}{4} \text{ et } f(0, -2) = -2.$$

Alors, les points $(\sqrt{15}/2, -1/2)$ et $(-\sqrt{15}/2, -1/2)$ sont des solutions globales du problème (P) et le point $(0, 1)$ est la solution globale du problème (Q).

4. Pour le point $(0, -2)$ et $\mu_1 = 1/4$ et $\mu_2 = 0$, la matrice hessienne est donnée par :

$$L(0, -2, 1/4, 0) = \nabla^2 f(0, -2) + \frac{1}{4} \nabla^2 g_1(0, -2) = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

L'espace tangent est donné par :

$$T^*(0, -2, 1/4) = \left\{ (x, y) : Dg_1(0, -2)(x, y)^T = 0 \right\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-3}{2} x^2 < 0.$$

Alors, le point $(0, -2)$ est un point de maximum local strict de f sur $\mathcal{D}$.