

Corrigé d'exercice 1: 1. Soit $(x_n, y_n, z_n) \in S$ avec $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Donc, on a :

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 4 \text{ par passage à la limite } \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 4 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S \Rightarrow S \text{ est fermé.}$$

D'autre part, on a :

$$\forall (x, y, z) \in S : \|(x, y, z)\| = 2 \Rightarrow S \text{ est borné.}$$

Par conséquent, f est continue sur S , d'après le théorème de Weierstrass les deux problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.

2. On pose $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Nous avons :

$$\forall (x, y, z) \in S : \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0 \Rightarrow \text{tous les points de } S \text{ sont réguliers.}$$

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z),$$

donc la condition de Lagrange est donné par :

$$\begin{cases} 2(x-3) + 2\lambda x = 0, \\ 2(y-\sqrt{2}) + 2\lambda y = 0, \\ 2(z-\sqrt{5}) + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1+\lambda}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{1+\lambda}, \\ z = \frac{\sqrt{5}}{1+\lambda}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -3.$$

(a) Si $\lambda = 1$, alors $(x, y, z) = (3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2)$.

(b) Si $\lambda = -3$, alors $(x, y, z) = (-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2)$.

D'autre part, nous avons :

$$f(3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2) = 4 \text{ et } f(-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2) = 36.$$

Donc, $(3/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{5}/2)$ est une solution de (P) et $(-3/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{5}/2)$ est une solution de (Q) .

Corrigé d'exercice 2: 1. Nous avons :

(a) Soit $(x_n, y_n) \in C_a$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors, on a :

$$(x_n - a)^2 + (y_n - a)^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - a)^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in C_a,$$

d'où C_a est fermé.

(b) Soit $(x, y) \in C_a$. Nous avons :

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - 2a^2 + 2a(x + y), \\ x \leq 1 + a, \\ y \leq 1 + a, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2a^2 + 4a + 1.$$

Donc, il existe $M = \sqrt{2a^2 + 4a + 1}$ tel que $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M$, d'où C_a est borné.

D'autre part, la fonction f est continue sur C_a . Alors, d'après théorème de Weierstrass les problèmes (P) et (Q) admet au moins une solution globale.

2. On pose $h(x, y) = (x - a)^2 + (y - a)^2 - 1$. Nous avons :

$$\forall (x, y) \in C_a : \nabla h(x, y) = (2x - 2a, 2y - 2a)^T \neq 0 \Rightarrow \text{tous les points de } C_a \text{ sont réguliers.}$$

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left((x-a)^2 + (y-a)^2 - 1 \right).$$

La condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x - 2a) = 0, \\ 2y + \lambda(2y - 2a) = 0, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = a\lambda, \\ (1+\lambda)y = a\lambda, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda = -1 \Rightarrow a = 0$ impossible.

(b) Si $\lambda \neq -1$, nous avons $x = y = a\lambda / (1 + \lambda)$, donc $\lambda_1 = a\sqrt{2} - 1$ et $\lambda_2 = -a\sqrt{2} - 1$. Les points sont

$$\left\{ \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Nous avons $f\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 1 < f\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1$. Alors,

— $\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est la solution du problème (P).

— $\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est la solution du problème (Q).

4. Si $a < 0$, nous avons : $f\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 1 > f\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1$. Alors,

— $\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}, a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ solution du problème (P).

— $\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ solution du problème (Q).

5. Quand $a \rightarrow 0$, le point A devient le centre du cercle C_a . Donc,

La distance minimale = La distance maximale = 1.

Corrigé d'exercice 3: 1. Nous avons :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, h_1(x, y, z) = 2x + 4y - 5 \text{ et } h_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y.$$

2. Nous avons :

(a) Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de D telle que $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Nous avons

$$\begin{cases} 2x_n + 4y_n = 5, \\ x_n^2 + z_n^2 - 2y_n = 0. \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 2\bar{x} + 4\bar{y} = 5, \\ \bar{x}^2 + \bar{z}^2 = 2\bar{y}. \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in D \Rightarrow D \text{ fermé.}$$

(b) On suppose que D non borné, alors il existe une suite $(x_n, y_n, z_n) \in D$ telle que

$$(x_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{z}) \text{ et } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} 2x_n + 4y_n = 5, \\ x_n^2 + z_n^2 = 2y_n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty = 5, \\ \bar{x} + \bar{z} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction.}$$

3. La fonction f continue sur un sous-ensemble fermé et borné D . D'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes (P1) et (P2) admet au moins une solution globale.

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\alpha \nabla h_1(x, y, z) + \beta \nabla h_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta x = 0, \\ 4\alpha - 2\beta = 0, \\ 2\beta z = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

d'où, tous les points de D sont régulés.

5. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (2x + 4y - 5) + \lambda_2 (x^2 + z^2 - 2y).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ 2y + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ 2z + 2\lambda_2 z = 0, \\ 2x + 4y = 5, \\ x^2 + z^2 = 2y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda_2)x = -\lambda_1, \\ y = \lambda_2 - 2\lambda_1, \\ (1 + \lambda_2)z = 0, \\ 2x + 4y = 5, \\ x^2 + z^2 = 2y. \end{cases}$$

6. Nous avons :

- (a) Si $\lambda_2 = -1$, alors $\lambda_1 = 0$ c'est à dire $y = -1$, $x = 9/2$ et $z^2 = -85/4 < 0$, donc impossible.
 (b) Si $\lambda_2 \neq -1$, alors $z = 0$, donc on a :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5, \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1) \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1).$$

Les points sont $(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0)$ et $(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0)$.

D'autre part, nous avons :

$$f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0\right) < f\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0\right).$$

- i. Le point $(\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1), \frac{1}{4}(6 - \sqrt{11}), 0)$ est solution du problème (P1).
 ii. Le point $(-\frac{1}{2}(\sqrt{11} + 1), \frac{1}{4}(6 + \sqrt{11}), 0)$ est solution du problème (P2).

Corrigé d'exercice 4: 1. Nous avons :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, h_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2 \text{ et } h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

2. Nous avons :

- (a) Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de D telle que $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Nous avons

$$\begin{cases} x_n + y_n + 2z_n = 0, \\ z_n = x_n^2 + y_n^2. \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z} = 0, \\ \bar{z} = \bar{x}^2 + \bar{y}^2. \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in D \Rightarrow D \text{ fermé.}$$

- (b) On suppose que D non borné, alors il existe une suite $(x_n, y_n, z_n) \in D$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}) \text{ et } z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} x_n + y_n + 2z_n = 2, \\ z_n = x_n^2 + y_n^2 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty = 2, \\ +\infty = \bar{x} + \bar{y} \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction.}$$

3. La fonction f continue sur un sous-ensemble fermé et borné D . D'après théorème de Weierstrass, les deux problèmes (P1) et (P2) au moins une solution globale.

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\alpha \nabla h_1(x, y, z) + \beta \nabla h_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta x = 0, \\ \alpha + 2\beta y = 0, \\ 2\alpha - \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

d'où, tous les points de D sont régulés.

5. La fonction de Lagrange donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + 2z - 2) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z).$$

La condition de Lagrange donnée par :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ 2y + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \\ 2z + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 2\lambda_2)x = -\lambda_1, \\ (2 + 2\lambda_2)y = -\lambda_1, \\ z = \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1), \\ x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda_2 = -1$, alors $\lambda_1 = 0$ c'est à dire $z = -1/2$ impossible.

(b) Si $\lambda_2 \neq -1$, alors on a :

$$x = y = \frac{-\lambda_1}{2 + 2\lambda_2} \text{ et } z = \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1).$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2\lambda_1}{2+2\lambda_2} + \lambda_2 - 2\lambda_1 = 2, \\ \frac{2\lambda_1^2}{(2+2\lambda_2)^2} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1). \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0,$$

d'où $x_1 = -1$ et $x_2 = 1/2$. Nous avons $6 = f(-1, -1, 2) > f(1/2, 1/2, 1/2) = 3/4$.

i. $(-1, -1, 2)$ est le point le plus éloigné de l'origine.

ii. $(1/2, 1/2, 1/2)$ est le point le plus proche de l'origine.

Corrigé d'exercice 5: 1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Soient $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 = 100 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 100 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est fermé.}$$

D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est borné.}$$

D'après théorème de Weierstrass, la fonction f admet au moins un point de minimum global et un point de maximum global sur $\mathcal{C}$ c'est à dire les deux problèmes (P1) et (P2) admet des solutions globales.

2. On pose $h(x, y) = x^2 + y^2 - 100$. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)^T \neq 0$, alors tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^y(x^2 + y^2) + \lambda(x^2 + y^2 - 100).$$

La condition de Lagrange est :

$$\begin{cases} x(e^y + \lambda) = 0, \\ e^y(x^2 + y^2 + 2y) + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

4. Nous avons :

(a) Si $e^y = -\lambda$, alors $100e^y + 2ye^y - 2ye^y = 0$ c'est à dire $e^y = 0$ donc impossible.

(b) Si $x = 0$, alors $y = 10$ et $\lambda = -6e^{10}$, $y = -10$ et $\lambda = 4e^{-10}$.

Les points sont $(0, 10)$ avec $\lambda = -6e^{10}$ et $(0, -10)$ avec $\lambda = 4e^{-10}$.

5. Nous avons :

$$100e^{-10} = f(0, -10) < f(0, 10) = 100e^{10},$$

donc la température minimale est $100e^{-10}$ et la température maximale est $100e^{10}$.

Corrigé d'exercice 6:

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3$. Soient $(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C}$ telle que

$$(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Nous avons :

$$(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est fermé.}$$

D'autre part, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ est borné.}$$

D'après théorème de Weierstrass, la fonction f admet au moins un point de minimum global et un point de maximum global sur $\mathcal{C}$ c'est à dire les deux problèmes (P_1) et (P_2) admet des solutions globales.

2. On pose $h(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Nous avons $\nabla h(x, y) = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0$, alors tous les points de $\mathcal{C}$ sont réguliers.

3. La fonction de Lagrange est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 400xyz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

La condition de Lagrange est :

$$200yz^2 + \lambda x = 0, \quad (1)$$

$$200xz^2 + \lambda y = 0, \quad (2)$$

$$400xyz + \lambda z = 0, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (4)$$

4. Nous avons :

(a) Si $\lambda = 0$, alors les points possibles sont $\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$.

(b) Si $\lambda \neq 0$. En multipliant (1) par x et (2) par y et avec la différence on obtient

$$y^2 = x^2 \quad (5)$$

En multipliant (1) par $2x$ et (3) par z et avec la différence on obtient

$$z^2 = 2x^2 \quad (6)$$

en remplaçant (5) et (6) dans (4), on obtient

$$x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{ et } z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les points sont

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

D'autre part, nous avons :

$$f(\pm 1, 0, 0) = f(0, \pm 1, 0) = f(0, 0, \pm 1) = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 50,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -50.$$

— Les solutions du problème (P_1) sont $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

— Les solutions du problème (P_2) sont $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

5. La température minimale est -50 et la température maximale est 50 .