



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Optimisation sans contraintes : cours et exercices corrigés

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

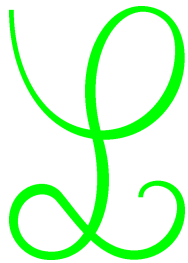
Année : 3^{me} année Licence Mathématiques

Semestre : 5

Année universitaire : 2019/2020

Dr. NOUIR Brahimi

Avant-propos



es problèmes d'optimisation peuvent être rencontrés dans toutes les disciplines et dans de nombreux domaines d'activité. En fonction du contexte, il s'agit de maximiser un "gain" ou de minimiser un "coût" en faisant le "meilleur" choix possible dans un ensemble de variables de décision qui peut être plus ou moins large, plus ou moins contraint. Ce qui peut s'écrire : on cherche x^* solution de

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

où f est la fonction à minimiser et la variable x est à choisir dans l'ensemble des valeurs admissibles C . Un problème de maximisation revient à considérer la minimisation de $-f$.

Lorsque l'ensemble C est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, Il s'agit d'un problème d'optimisation avec contraintes. L'objectif de ce polycopie est de couvrir les techniques mathématiques de base pour « résoudre » les problèmes d'optimisation sans contraintes, c'est à dire, lorsque C est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^n$). Ce polycopié est destiné aux étudiants de troisième année Licence mathématiques, semestre 5, qui suivent le cours de "optimisation sans contraintes".

Semaine	Sujets traités en cours
1	Ensembles convexes, Opérations algébriques des ensembles convexes, Propriétés topologiques des ensembles convexes
2	Fonctions convexes, épigraphe d'une fonction
3	Caractérisations de premier ordre des fonctions convexes, Caractérisation du second ordre des fonctions convexes
4	Fonction de deux variables et de classe $\mathcal{C}^2$, Opérations sur les fonctions convexes, Ensembles de niveau pour des fonctions convexes, Convexité et inégalités
5	Définitions, Résultats d'existence et d'unicité
6	Conditions d'optimalité du premier ordre
7	Conditions d'optimalité du deuxième ordre
8	Méthode pratique pour $\mathbb{R}^2$, Fonctions quadratiques, Problème des moindres carrés linéaire
9	Méthodes de gradient à pas fixe et à pas optimal
10	Méthode de direction conjuguée, Méthode de gradient conjugué
11	Méthode de Newton
12	Méthode de relaxation

Afin de bénéficier pleinement de l'enseignement dispensé, il est fortement recommandé de travailler de manière assidue et de :

- ☞ aller au cours en amphi ;
- ☞ réviser le cours **chaque semaine** en s'assurant de connaître les définitions, résultats ainsi que les démonstrations et d'avoir bien compris les différents exemples et remarques ;

- ☞ fournir un travail individuel pour **préparer et chercher** les exercices chaque semaine avant d'aller en TD;
- ☞ participer de manière active et dynamique aux séances de TD;
- ☞ faire les autres exercices proposés et qui ne sont pas traités en TD;
- ☞ ne pas hésiter à poser toute question ou demander conseil à l'équipe pédagogique.

N.B :Toutes les erreurs qui pourraient figurer dans ce polycopie, sont de ma responsabilité.

Dr. NOUIR Brahim

Table des matières

1	Quelques rappels de calcul différentiel	7
1.1	Quelques Notations	7
1.2	Calcul différentiel	8
1.2.1	Formules de Taylor	12
1.3	Matrices carrées réelles	12
1.4	Exercices	13
2	Convexité	14
2.1	Ensembles convexes	14
2.1.1	Opérations algébriques des ensembles convexes	16
2.1.2	Propriétés topologiques des ensembles convexes	18
2.2	Fonctions convexes	19
2.2.1	Définition et exemples	19
2.2.2	Épigraphe d'une fonction	22
2.3	Caractérisations de premier ordre des fonctions convexes	23
2.4	Caractérisation du second ordre des fonctions convexes	26
2.5	Critères pour reconnaître une fonction convexe, strictement convexe, concave et strictement concave	28
2.5.1	Fonction de deux variables et de classe $\mathcal{C}^2$	28
2.5.2	Méthode des mineurs principaux	29
2.6	Opérations sur les fonctions convexes	30
2.7	Ensembles de niveau pour des fonctions convexes	32
2.8	Convexité et inégalités	34
2.9	Exercices	37
3	Minimisation sans contraintes	40
3.1	Résultats d'existence et d'unicité d'un point de minimum global	41
3.2	Conditions d'optimalité d'un extrémum local	47
3.2.1	Conditions nécessaires du premier ordre	47
3.2.2	Conditions du deuxième ordre	48
3.2.3	Méthode pratique pour $\mathbb{R}^2$	49
3.3	Fonctions quadratiques	51
3.4	Problème des moindres carrés linéaire	51
3.5	Exercices	54
4	Algorithmes	58
4.1	Méthodes de descente	59
4.2	Méthodes de gradient	60
4.2.1	Pas optimal : cas quadratique	63
4.2.2	Convergence	64
4.3	Méthodes de direction conjuguée	66

4.3.1	Algorithme de la direction conjuguée	67
4.3.2	Algorithme de gradient conjugué	70
4.4	Méthode de Newton	73
4.5	Exercices	76
5	Travaux pratiques	80
5.1	TP 1 :Optimisation sans contrainte en dimension un	80
5.1.1	Programmes sous MATLAB	82
5.2	TP 2 : Méthodes de gradient	87
5.2.1	Programmes sous MATLAB	88
5.3	TP3 : Méthode du gradient conjugué et méthode de Newton	93
5.3.1	Méthode du gradient conjugué	93
5.3.2	Méthode de Newton	94
6	Corrections des exercices	96

Dr. NOUIR Brahim

Quelques rappels de calcul différentiel

1.1 Quelques Notations

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ désigne l'espace **Euclidien** $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. En général un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sera noté $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (vecteur colonne).
2. On note $e_1, e_2, \dots, e_n$ les éléments de la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$, où e_i est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$(e_i)_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.1)$$

où δ_{ij} est le symbole de **Kronecker**.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note par $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ le **produit scalaire** de x et y , qui est donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** (on note $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note par $\|x\| \geq 0$ la **norme Euclidienne** de x , donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Rappelons les propriétés d'une norme (donc aussi de la norme Euclidienne) :

- (a) $\|0\| = 0$ et $\|x\| > 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
 - (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
5. Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ on notera par $B(x, r)$ la **boule ouverte** du centre x et rayon r , donnée par :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < r\}.$$

6. Si $(x^{(k)})$ est une suite dans $\mathbb{R}^n$ et x est un élément de $\mathbb{R}^n$ on dit que $(x^{(k)})$ **converge** vers x (notée $x^{(k)} \rightarrow x$) si $\|x^{(k)} - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Rappelons que nous avons : $x^{(k)} \rightarrow x$ si et seulement si $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$ en $\mathbb{R}$ où $x_i^{(k)}$ (respectivement x_i) est la i -ème composante de $x^{(k)}$ (respectivement x).

7. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$.

- On définit l'**intérieur** de U comme l'ensemble des éléments $x \in U$ pour lesquels il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
- On dit que U est **ouvert** si

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U.$$

- On dit que U est **fermé** si pour toute suite $(x^{(k)}) \subset U$ tel que $x^{(k)} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ on a $x \in U$.

8. Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ on note $[a, b]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$[a, b] = \{a + t(b - a) = (1 - t)a + tb, \quad t \in [0, 1]\}.$$

L'ensemble $[a, b]$ est aussi appelé **le segment** reliant a à b .

Remarque 1.1. – $[a, b] = [b, a]$ (exercice!).

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on retrouve la notation $[a, b]$ pour l'intervalle des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$.

9. Rappelons aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.2 Calcul différentiel

On considère m et n deux nombres de $\mathbb{N}^*$ ((très souvent dans ce cours on aura $m = 1$)).

1. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que f est **continue** en $a \in U$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point $x \in U$.

Remarque 1.2. – f est continue en point $a \in U$ si et seulement si pour toute suite $(x^{(k)})$ de U converge vers a implique que $f(x^{(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(a)$.

- Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ avec $f_1, f_2, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ alors f est continu en $a \in U$ si et seulement si $f_1, f_2, \dots, f_m$ sont continues en a .

Pour tous les points suivants on va supposer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction.

2. Pour tout $x \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la **dérivée directionnelle** de f en x suivant le vecteur v s'il existe est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Remarque 1.3. Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ avec $f_1, f_2, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(x), \frac{\partial f_2}{\partial v}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(x) \right), \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

3. Pour tout $x \in \Omega$ et $i = 1, 2, \dots, n$, la dérivée partielle première de f par rapport à la variable x_i s'il existe est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}.$$

En particulier, si $n = 1$ on note

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}.$$

4. Pour tout $x \in \Omega$, on note par $J_f(x)$ **la matrice Jacobienne** de f en x s'il existe est un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$(J_f(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n.$$

Le gradient de f en x est défini comme la transposée de la matrice Jacobienne de f en x :

$$\nabla f(x) = (J_f(x))^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Remarque 1.4. Dans le cas particulier $m = 1$ donc $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ alors en considérant tout élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, on va dire que $\nabla f(x)$ est le vecteur colonne

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \in \mathbb{R}^n.$$

5. On dira que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable au point $x \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui vérifie la condition suivante,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, x + h \in \Omega, f(x + h) = f(x) + L(h) + \|h\| \epsilon(h) \quad \text{avec } \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

L'application L est alors unique et on note $df(x) = L$ où $Df(x) = L$.

Remarque 1.5. (a) Si la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable au point $x \in \Omega$ alors elle est continue au point x .

(b) Si la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $x \in \Omega$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

où $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ désigne l'application linéaire qui caractérise la différentiabilité de f .

(c) Si la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $x \in \Omega$, nous avons

$$df(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

6. Pour tout $a \in \Omega$ et $i, j = 1, \dots, n$ la dérivée partielle seconde de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ au point $a \in \Omega$ par rapport à x_i et x_j s'il existe est donnée par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Pour $i = j$ on écrira $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ à la place de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

7. Dans le cas $m = 1$, la **matrice Hessienne** de f en $x \in \Omega$, notée par $H_f(x)$ où $\nabla^2 f(x)$ est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$(\nabla^2 f(x))_{ij} = (H_f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

8. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω pour $p = 1$ ou $p = 2$ si toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur Ω .
9. On a le théorème de Schwarz : si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

c'est à dire, la **matrice Hessienne** $H_f(x)$ est symétrique.

10. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$H_f(x) = J_{\nabla f}(x) = \nabla J_f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

(la matrice Hessienne de f est le Jacobien du gradient de f ou le gradient de la Jacobienne de f).

11. (composition) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$ avec Ω, U ouverts $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $f(\Omega) \subset U$. Considérons la fonction composée $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$.

- (a) Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.
- (b) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a l'égalité matricielle

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Conséquences 1.1. 1. Si $m = p = 1$ alors

$$\nabla(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \nabla f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

2. Si $n = p = 1$ alors

$$(g \circ f)'(x) = \langle \nabla g(f(x)), f'(x) \rangle, \quad \forall x \in \Omega.$$

Proposition 1.1. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω . Alors, on a :

$$H_f(x)v = \nabla^2 f(x)v = \nabla \langle \nabla f(x), v \rangle \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

où le premier gradient dans le membre de droite de l'égalité est considéré par rapport à la variable x .

Démonstration. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \nabla f(x), v \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} v_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_j = (H_f(x)v)_i.$$

□

Exemples 1.1. 1. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction **constante** alors $\nabla f = 0$ et $J_f = 0$. On a aussi évidemment $H_f = 0$ dans le cas $m = 1$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par :

$$f(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice donnée (c'est à dire, f est une fonction **linéaire**).

Il est facile de voir qu'on a

$$J_f(x) = A, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

alors, la matrice Jacobienne est constante.

Dans la cas particulier $m = 1$, une fonction linéaire générale peut être écrite sous la forme

$$f(x) = \langle a, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donné. Il est clair que

$$\nabla f(x) = a \text{ et } H_f(x) = 0.$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée par

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, réelle, de taille n (c'est à dire, f est la **forme quadratique** associée à la matrice A). Alors pour un $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j = A_{pp} x_p^2 + \sum_{j=1, j \neq p}^n A_{pj} x_p x_j + \sum_{i=1, i \neq p}^n A_{ip} x_i x_p + \sum_{i,j=1, i \neq p, j \neq p}^n A_{ij} x_i x_j.$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = 2A_{pp} x_p + \sum_{j=1, j \neq p}^n A_{pj} x_j + \sum_{i=1, i \neq p}^n A_{ip} x_i = (Ax)_p + (Ax)_p^T.$$

Nous avons donc obtenu :

$$\nabla f(x) = (A + A^T)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En utilisant la formule $H_f = J_{\nabla f}$ on déduit

$$H_f(x) = A + A^T, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

donc la matrice hessienne de f est constante.

Remarque 1.6. En particulier, si A est symétrique c'est à dire $A = A^T$ alors

$$\nabla \langle Ax, x \rangle = 2Ax, \text{ et } \nabla^2 \langle Ax, x \rangle = 2A, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1.2.1 Formules de Taylor

Proposition 1.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$. Alors :

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, on a :

(a) La formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \int_0^1 \langle \nabla f(a + th), h \rangle dt.$$

(b) La formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 1 est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a + \theta h), h \rangle \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

(c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

2. Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on a :

(a) La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle \nabla^2 f(a + th) h, h \rangle dt.$$

(b) La formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 2 est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a + \theta h) h, h \rangle \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

(c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 est donnée par :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a) h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

1.3 Matrices carrées réelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle.

1. On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ avec $x \neq 0$ tel que

$$Ax = \lambda x$$

on appelle x vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

2. On dit que la matrice A est **semi-définie positive** si

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que A est **définie positive** si

$$\langle Ax, x \rangle > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x \neq 0.$$

3. Rappelons que si A est symétrique alors toutes les valeurs propres de A sont réelles ; en plus il existe n vecteurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}^n$ formant une base orthonormée en $\mathbb{R}^n$.

4. Supposons que la matrice A est symétrique. Alors

$$\langle Ah, h \rangle \geq \lambda_{\min} \|h\|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

où $\lambda_{\min} \in \mathbb{R}$ est la plus petite valeur propre de A .

Remarquons que l'inégalité précédente devient égalité si h est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{\min}$.

5. Supposons que A est symétrique. Alors A est semi-définie positive si et seulement si $\lambda_{\min} \geq 0$ et A est définie positive si et seulement si $\lambda_{\min} > 0$.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. (Correction 1). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer les dérivées partielles de f . Sont-elles continues ?
3. Calculer les dérivées directionnelles (si elles existent) de f au point de coordonnées $(0, 0)$.
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 1.2. (Correction 2). Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par les expressions suivantes :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{yx - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
3. Est-ce que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1.3. (Correction 3). Développer au voisinage de $(0, 0)$ à l'ordre 2 les fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \arctan(x + y^2), \quad g(x, y) = \ln(1 + xy).$$

Convexité

Dans ce chapitre, nous présentons les ensembles convexes et les fonctions convexes, qui sont la théorie mathématique essentielle pour analyser et comprendre les aspects théoriques et pratiques de l'optimisation.

2.1 Ensembles convexes

Définition 2.1. (Ensembles convexes). Soit C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe si pour tous $x, y \in C$ le segment $[x, y]$ est inclus dans C , c'est à dire,

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

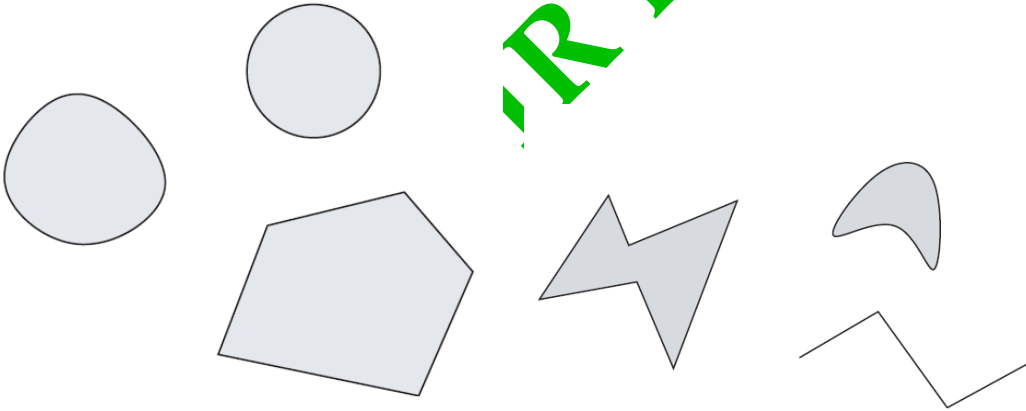


FIGURE 2.1 – Les trois ensembles de gauche sont convexes, tandis que les trois ensembles de droite sont non convexes

Exemple 2.1. (Convexité des lignes). Une ligne dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par :

$$L = \{z + td \mid t \in \mathbb{R}\},$$

où $z, d \in \mathbb{R}^n$ et $d \neq 0$. Montrer que L est un ensemble convexe. Soient $x, y \in L$, ils existent $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = z + t_1d \quad \text{et} \quad y = z + t_2d$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)(z + t_1d) + \lambda(z + t_2d) = z + [(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2]d \in L.$$

Lemme 2.1. (Convexité des hyperplans et demi-espaces). Soient $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Nous avons les ensembles suivants sont convexes :

1. L'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$,
2. Le demi-espace $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$,
3. Le demi-espace ouvert $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < b\}$.

Démonstration. Nous ne prouverons que la convexité du demi-espace puisque la preuve de convexité de les deux autres ensembles est presque identique. Soient $x, y \in H^-$ et $\lambda \in [0, 1]$. On pose $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, nous avons :

$$a^T z = a^T [(1 - \lambda)x + \lambda y] = (1 - \lambda)(a^T x) + \lambda(a^T y) \leq (1 - \lambda)b + \lambda b = b.$$

Alors, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in H^-$ donc H^- est convexe. □

D'autres exemples importants d'ensembles convexes sont les boules fermées et ouvertes.

Lemme 2.2. (Convexité des boules). Soient $c \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire définie sur $\mathbb{R}^n$. Alors, la boule ouverte

$$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| < r\}$$

et la boule fermée

$$\bar{B}(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| \leq r\}$$

sont des ensembles convexes.

Démonstration. Nous allons montrer la convexité de la boule fermée. La preuve de la convexité de la boule ouverte est presque identique. Soient $x, y \in \bar{B}(c, r)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors,

$$\|x - c\| \leq r \quad \text{et} \quad \|y - c\| \leq r. \quad (2.1)$$

On pose $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|z - c\| &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - c\| \\ &= \|(1 - \lambda)(x - c) + \lambda(y - c)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - c\| + \lambda\|y - c\| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \text{ et } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &\leq (1 - \lambda)r + \lambda r = r \quad \text{équation (2.1).} \end{aligned}$$

Par conséquent, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in \bar{B}(c, r)$, donc $\bar{B}(c, r)$ est convexe. □

Un autre exemple important d'ensembles convexes sont les ellipsoïdes

Exemple 2.2. (Convexité des ellipsoïdes). Un ellipsoïde est un ensemble défini par :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q x + 2b^T x + c \leq 0\},$$

où Q est une matrice carré d'ordre n et semi-définie positive. On pose,

$$f(x) = x^T Q x + 2b^T x + c$$

L'ensemble E peut être réécrit comme

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}.$$

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, $f(x) \leq 0$ et $f(y) \leq 0$. On pose $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Nous avons :

$$z^T Q z = [(1 - \lambda)x + \lambda y]^T Q [(1 - \lambda)x + \lambda y] = (1 - \lambda)^2 x^T Q x + \lambda^2 y^T Q y + 2\lambda(1 - \lambda) x^T Q y. \quad (2.2)$$

On note $x^T Q y = (Q^{1/2}x)^T (Q^{1/2}y)$, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young $\sqrt{ac} \leq \frac{1}{2}(a + c)$ avec $a, c > 0$, on obtient :

$$x^T Q y \leq \|Q^{1/2}x\| \|Q^{1/2}y\| = \sqrt{x^T Q x} \sqrt{y^T Q y} \leq \frac{1}{2}(x^T Q x + y^T Q y). \quad (2.3)$$

En remplaçant (2.3) dans (2.2), nous obtenons :

$$z^T Q z \leq (1 - \lambda) x^T Q x + \lambda y^T Q y,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} f(z) &= z^T Q z + 2b^T z + c \\ &\leq (1 - \lambda) x^T Q x + \lambda y^T Q y + 2(1 - \lambda)b^T x + 2\lambda b^T y + c \\ &= (1 - \lambda)(x^T Q x + 2b^T x + c) + \lambda(y^T Q y + 2b^T y + c) \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq 0. \end{aligned}$$

Alors, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in E$, donc E est convexe.

2.1.1 Opérations algébriques des ensembles convexes

Une propriété importante de la convexité est qu'elle est conservée sous l'intersection des ensembles.

Lemme 2.3. Soit $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe pour tout $i \in I$, où I est un ensemble d'indices (éventuellement infini). Alors l'ensemble $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Démonstration. Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} C_i$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, pour tout $i \in I$, $x, y \in C_i$ et C_i est convexe, donc

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C_i, \text{ pour tout } i \in I.$$

Par conséquent,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Donc, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe. □

Nous avons le théorème suivant pour la convexité pour l'addition, le produit cartésien, l'image directe et l'image réciproque.

Théorème 2.1. 1. Soient $C_1, C_2, \dots, C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des convexes et soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Alors, l'ensemble suivant :

$$\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \dots + \mu_k C_k = \left\{ \sum_{i=1}^k \mu_i x_i : x_i \in C_i, i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

est convexe.

2. Soit $C_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ est un ensemble convexe pour tous $i = 1, 2, \dots, m$. Alors, le produit cartésien

$$C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in C_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

est un ensemble convexe.

3. Soient $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. Alors, l'ensemble

$$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$$

est un convexe.

4. Soient $D \subseteq \mathbb{R}^m$ est un ensemble convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. Alors, l'ensemble

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in D\}$$

est un convexe.

Un résultat direct de la partie 1. du Théorème 2.1 est que si $C \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe et $b \in \mathbb{R}^n$, alors l'ensemble $C + b = \{x + b : x \in C\}$ est également convexe.

Définition 2.2. (Combinaison convexe). On appelle combinaison convexe de m vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, tout vecteur u qui peut s'écrire

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Proposition 2.1. Soit C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. C est convexe si et seulement si C contient toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de C .

Démonstration. Il est évident que si C contient toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de C , alors C est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. Si la famille a un ou deux éléments, la définition d'un sous-ensemble convexe montre que toute combinaison convexe de cette famille est dans C . Supposons que ceci soit vraie pour toutes les familles ayant au plus m éléments. Nous allons maintenant prouver le théorème pour $m + 1$ vecteurs. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in C$

et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1} \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. Nous montrerons que

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i \in C.$$

- Si $\lambda_{m+1} = 1$, alors $u = x_{m+1} \in C$.
- Si $0 \leq \lambda_{m+1} < 1$, alors

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} x_i}_v + \lambda_{m+1} x_{m+1}.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1 - \lambda_{m+1}}{1 - \lambda_{m+1}} = 1,$$

alors v est une combinaison convexe de m points de C , et donc par hypothèse de récurrence on a $v \in C$. Ainsi, par la définition d'un ensemble convexe,

$$u = (1 - \lambda_{m+1}) v + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in C.$$

□

2.1.2 Propriétés topologiques des ensembles convexes

Nous commençons par prouver que la fermeture d'un ensemble convexe est un ensemble convexe.

Théorème 2.2. Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\text{adh}(C)$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soient $x, y \in \text{adh}(C)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, par la définition de fermeture d'un ensemble, il existe des suites $(x_k) \subset C$ et $(y_k) \subset C$ tels que

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x \text{ et } y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y.$$

Par la convexité de C , nous avons :

$$(1 - \lambda) x_k + \lambda y_k \in C \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$(1 - \lambda) x_k + \lambda y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (1 - \lambda) x + \lambda y \in \text{adh}(C),$$

ce qui implique que $\text{adh}(C)$ est convexe. □

Pour démontrer que l'intérieur d'un ensemble convexe est également un ensemble convexe, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.4. (Principe du segment de droite). Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ avec $\text{int}(C) \neq \emptyset$. Si $x \in \text{int}(C)$ et $y \in \text{adh}(C)$, alors $(1 - \lambda) x + \lambda y \in \text{int}(C)$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$.

Démonstration. Soit $x \in \text{int}(C)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset C$. On pose

$$z = (1 - \lambda) x + \lambda y.$$

Pour démontrer que $z \in \text{int}(C)$, on montrera que $B(z, (1 - \lambda) \epsilon) \subset C$. Soit $w \in B(z, (1 - \lambda) \epsilon)$ c'est à dire

$$\|w - z\| < (1 - \lambda) \epsilon.$$

D'autre part, $y \in \text{adh}(C)$ donc il existe $w_1 \in C$ tel que

$$\|w_1 - y\| < \frac{(1 - \lambda)\epsilon - \|w - z\|}{\lambda}. \quad (2.4)$$

On pose $w_2 = \frac{1}{1-\lambda}(w - \lambda w_1)$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \|w_2 - x\| &= \left\| \frac{w - \lambda w_1}{1 - \lambda} - x \right\| \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} \|(w - z) + \lambda(y - w_1)\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda} (\|w - z\| + \lambda\|w_1 - y\|) \\ &\stackrel{(2.4)}{<} \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, $w_2 \in C$. Enfin, puisque $w = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2$ avec $w_1, w_2 \in C$, nous avons que $w \in C$, et le principe du segment de droite est donc prouvé. $\square$

Théorème 2.3. (Convexité des intérieurs des ensembles convexes). Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\text{int}(C)$ est convexe.

Démonstration. 1. Si $\text{int}(C) = \emptyset$, alors le théorème est évidemment vrai.

2. Si $\text{int}(C) \neq \emptyset$, alors pour tout $x_1, x_2 \in \text{int}(C)$ et $\lambda \in]0, 1[$, d'après Lemme 2.4, nous avons :

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \text{int}(C),$$

d'où $\text{int}(C)$ est convexe. $\square$

2.2 Fonctions convexes

2.2.1 Définition et exemples

Définition 2.3. Soient C un sous-ensemble convexe $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est **convexe** sur C si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad (2.5)$$

2. On dit que f est **strictement convexe** sur C si

$$\forall x, y \in C (x \neq y), \forall \lambda \in]0, 1[\quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad (2.6)$$

3. On dit que f est **fortement convexe** sur C s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - \alpha \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2. \quad (2.7)$$

L'inégalité fondamentale (2.5) est illustrée dans la Figure 2.2.

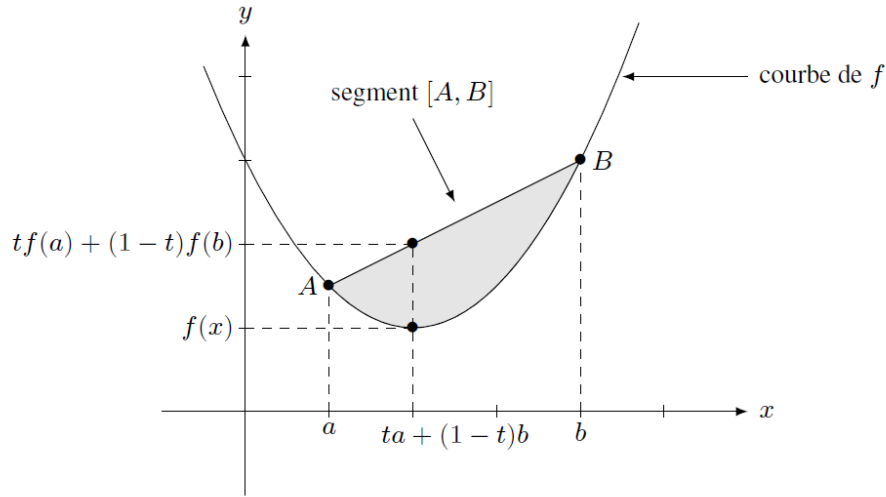


FIGURE 2.2 – Courbe d'une fonction convexe.

La définition de f convexe signifie que si l'on prend deux points sur la courbe de f , alors le segment défini par ces deux points reste au dessus de la courbe de f .

Remarque 2.1. Soient C un sous-ensemble convexe $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est **concave** sur C si $-f$ est convexe c'est à dire

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

2. On dit que f est **strictement concave** sur C si $-f$ est strictement convexe c'est à dire

$$\forall x, y \in C (x \neq y), \forall \lambda \in]0, 1[\quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] > (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

3. On dit que f est **fortement concave** sur C si $-f$ est fortement convexe c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) + \alpha \lambda (1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

Exemple 2.3. (Fonction affine). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x) = a^T x + b, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f[(1 - \lambda)x + \lambda y] &= a^T [(1 - \lambda)x + \lambda y] + b \\ &= (1 - \lambda)a^T x + \lambda a^T y + (1 - \lambda)b + \lambda b \\ &= (1 - \lambda)(a^T x + b) + \lambda(a^T y + b) \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

Alors, f est convexe et concave sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.4. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On considère $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction définie par :

$$f(x) = \|x\|.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} g[(1 - \lambda)x + \lambda y] &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \\ &= (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y). \end{aligned}$$

Alors, g est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4. (Inégalité de Jensen). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tout $x_1, x_2, \dots, x_k \in C$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, nous avons l'inégalité suivante :

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i). \quad (2.8)$$

Démonstration. Montrons l'inégalité (2.8) par récurrence. Pour $k = 1$, nous avons :

$$f(x_1) \leq f(x_1), \text{ pour tout } x_1 \in C.$$

On suppose que l'inégalité (2.8) est vrai pour tous $x_1, x_2, \dots, x_k \in C$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Nous allons maintenant prouver l'inégalité (2.8) pour $k + 1$ vecteurs.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in C$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1} \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Nous avons :

1. Si $\lambda_{k+1} = 1$, l'inégalité (2.8) est évidente.
2. Si $\lambda_{k+1} \in [0, 1[$, alors on a :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &= f\left[(1 - \lambda_{k+1}) \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i}_v + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right] \\ &\leq (1 - \lambda_{k+1}) f(v) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$f(v) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} f(x_i). \quad (2.10)$$

En combinant (2.9) avec (2.10), on obtient :

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i).$$

□

2.2.2 Épigraphe d'une fonction

Définition 2.4. (Epigraphe d'une fonction). Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On appelle le graphe de f , noté $Gr(f)$, le sous-ensemble des éléments $(x, t) \in C \times \mathbb{R}$ telle que $f(x) = t$:

$$Gr(f) = \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} / f(x) = t\}.$$

2. On appelle l'épigraphe de f , noté $Epi(f)$, le sous-ensemble des éléments $(x, t) \in C \times \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leq t$:

$$Epi(f) = \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} / f(x) \leq t\}.$$

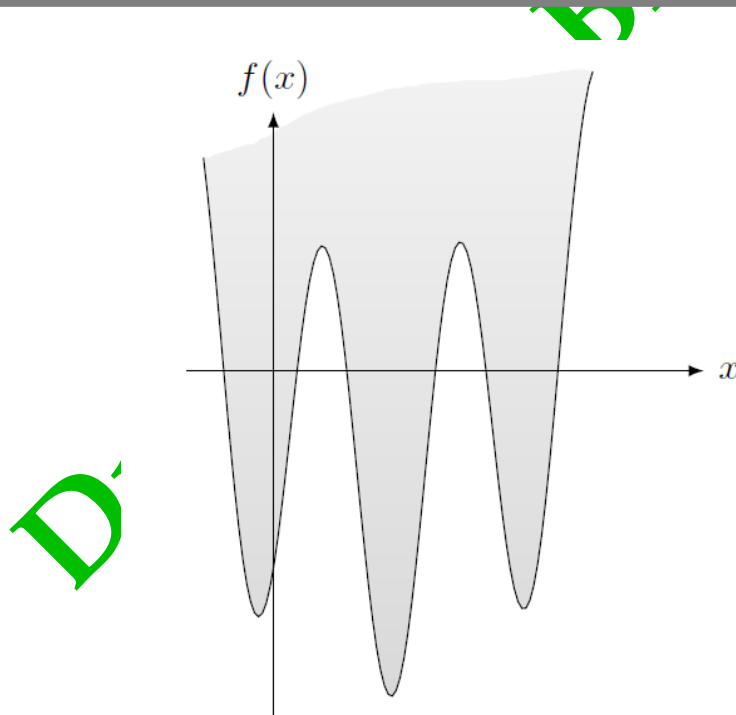


FIGURE 2.3 – Illustration de l'épigraphe d'une fonction

Proposition 2.2. Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est convexe si et seulement si $Epi(f)$ est convexe.

Démonstration. 1. On suppose que f est convexe. Soient $(x, t), (x', t') \in Epi(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous

avons :

$$\begin{aligned}(x, t) \in \text{Epi}(f) &\Rightarrow f(x) \leq t, \\ (x', t') \in \text{Epi}(f) &\Rightarrow f(x') \leq t'.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$f[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') \leq (1-\lambda)t + \lambda t'.$$

D'où

$$(1-\lambda)(x, t) + \lambda(x', t') = [(1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)t + \lambda t'] \in \text{Epi}(f)$$

donc $\text{Epi}(f)$ est convexe.

2. On suppose que $\text{Epi}(f)$ est convexe. Soient $x, x' \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(x, f(x)) \in \text{Epi}(f) \quad \text{et} \quad (x', f(x')) \in \text{Epi}(f).$$

Mais $\text{Epi}(f)$ est convexe. Donc, on a :

$$(1-\lambda)(x, f(x)) + \lambda(x', f(x')) = [(1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x')] \in \text{Epi}(f).$$

D'où

$$f[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x').$$

Alors, f est convexe sur C .

□

2.3 Caractérisations de premier ordre des fonctions convexes

Théorème 2.5. (L'inégalité du gradient). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, f est convexe sur C si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \text{pour tout } x, y \in C. \quad (2.11)$$

Démonstration. On suppose que f est convexe sur C . Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors,

1. Si $x = y$, alors l'inégalité (2.11) est triviale.
2. Si $x \neq y$, nous avons :

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

et donc

$$f(y) \geq f(x) + \frac{f[x + \lambda(y-x)] - f(x)}{\lambda}.$$

D'après la différentiabilité de f et par passage à la limite $\lambda \rightarrow 0^+$, on obtient (2.11).

Réciproquement, on suppose que f est vérifiée l'inégalité (2.11). Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$. On pose

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y.$$

Alors, on a :

$$x - z = \frac{z - \lambda y}{1 - \lambda} - z = -\frac{\lambda}{1 - \lambda} (y - z).$$

En utilisant (2.11) pour x, z et y, z , nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle, \\ f(y) &\geq f(z) - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \langle \nabla f(z), x - z \rangle. \end{aligned}$$

En multipliant la première inégalité par $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ et en l'ajoutant à la seconde, on obtient :

$$\frac{f(z)}{\lambda} \leq \frac{1-\lambda}{\lambda} f(x) + f(y)$$

En multipliant l'inégalité précédente par λ , on obtient :

$$f(z) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y),$$

d'où f est convexe. □

Une légère modification de la preuve ci-dessus montrera qu'une fonction est strictement convexe si et seulement si l'inégalité de gradient est satisfaite avec une inégalité stricte pour tout $x \neq y$.

Théorème 2.6. (L'inégalité de gradient pour la fonction strictement convexe). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, f est strictement convexe sur C si et seulement si

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ pour tout } x, y \in C \text{ et } x \neq y. \quad (2.12)$$

En utilisant (2.11) et (2.12), nous pouvons établir les conditions dans lesquelles une fonction quadratique est convexe / strictement convexe.

Théorème 2.7. (Fonction quadratique). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

où A est une matrice carré d'ordre n et symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors, nous avons :

1. f est convexe si et seulement si A est semi-définie positive.
2. f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.
3. f est concave si et seulement si A est semi-définie négative.
4. f est strictement concave si et seulement si A est définie négative.

Démonstration. 1. Grâce Théorème 2.5, f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ est équivalent

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, on a :

$$\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c \geq \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c + \langle Ax - b, y - x \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Après un certain réarrangement des termes, nous pouvons réécrire cette dernière

$$\langle A(y-x), y-x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $h = y - x$, donc

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0 \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n,$$

d'où A est semi-définie positive.

2. Grâce Théorème 2.6, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ est équivalent

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq y.$$

Alors, on a :

$$\frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c > \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c + \langle Ax - b, y-x \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq y.$$

Après un certain réarrangement des termes, nous pouvons réécrire cette dernière

$$\langle A(y-x), y-x \rangle > 0 \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq y.$$

On pose $h = y - x$, donc

$$\langle Ah, h \rangle > 0 \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n \text{ et } h \neq 0,$$

d'où A est définie positive.

□

Des exemples de fonctions quadratiques convexes et non convexes sont illustrés à la figure 2.4.

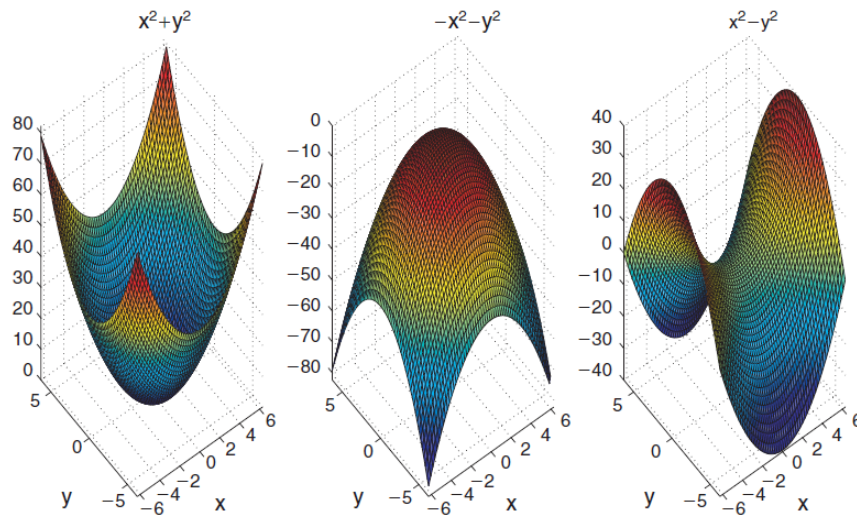


FIGURE 2.4 – Fonction convexe et non convexe.

Théorème 2.8. (Monotonie du gradient). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors, f est convexe sur C si et seulement si

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in C. \quad (2.13)$$

Démonstration. On suppose que f est convexe sur C . D'après Théorème 2.5, pour tout $x, y \in C$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \\ f(x) &\geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

En additionnant les deux inégalités, on obtient (2.13).

Réciproquement, on suppose que f est satisfait (2.13). Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(t) = f(x + t(y - x)).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} f(y) &= g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt \\ &= f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle dt \\ &= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x \rangle dt \\ &= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t} \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), t(y - x) \rangle dt}_{\geq 0} \\ &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle. \end{aligned}$$

D'après Théorème 2.5, f est convexe sur C . □

2.4 Caractérisation du second ordre des fonctions convexes

Théorème 2.9. (Caractérisation du seconde ordre de la convexité). Soient C un sous-ensemble ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, f est convexe sur C si et seulement si la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in C$ c'est à dire

$$\forall x \in C, \forall h \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle \geq 0.$$

Démonstration. On suppose que $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in C$. Soient $x, y \in C$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(t) = f(x + t(y - x)).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur C , alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Avec la formule de Maclaurin à l'ordre 1 avec le reste de Lagrange, on obtient :

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(t_0), \quad \text{où } 0 < t_0 < 1.$$

Donc, nous avons :

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(z) (y - x), y - x \rangle}_{\geq 0}, \quad \text{où } z = x + t_0(y - x) \in C.$$

Par conséquent,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

D'après Théorème 2.5, f est convexe sur C .

Réciproquement, on suppose que f est convexe sur C . Nous avons : $\forall x, y \in C$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(x + \lambda(y - x)) \geq f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y - x \rangle. \quad (2.14)$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste de Young, on obtient :

$$f(x + \lambda(y - x)) = f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \langle \nabla^2 f(x)(y - x), y - x \rangle + o(\lambda^2 \|y - x\|^2). \quad (2.15)$$

De (2.14) et (2.15), on obtient :

$$\frac{\lambda^2}{2} \langle \nabla^2 f(x)(y - x), y - x \rangle + o(\lambda^2 \|y - x\|^2) \geq 0.$$

En divisant sur λ^2 , on obtient :

$$\frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x)(y - x), y - x \rangle + \frac{o(\lambda^2 \|y - x\|^2)}{\lambda^2} \geq 0.$$

Par passage à la limite $\lambda \rightarrow 0^+$, on trouve :

$$\langle \nabla^2 f(x)(y - x), y - x \rangle \geq 0.$$

On pose $y - x = h$. Alors, on a :

$$\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq 0 \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

D'où, $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in C$. □

Exemple 2.5. (Convexité de la fonction *log - som - exp*). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}).$$

La fonction f est appelée fonction *log - som - exp*. Montrons que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Les dérivées partielles premières de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donc, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{cases} -\frac{e^{x_i} e^{x_j}}{\left(\sum_{k=1}^n e^{x_k}\right)^2}, & i \neq j \\ -\frac{e^{x_i} e^{x_i}}{\left(\sum_{k=1}^n e^{x_k}\right)^2} + \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}}, & i = j. \end{cases}$$

Donc, on peut écrire la matrice Hessienne comme

$$\nabla^2 f(x) = \text{diag}(w) - ww^T,$$

où

$$w_i = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^n e^{x_j}}.$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Nous avons :

$$v^T \nabla^2 f(x) v = \sum_{i=1}^n w_i v_i^2 - (v^T w)^2.$$

Soient s et t deux vecteurs définis par :

$$s_i = \sqrt{w_i} v_i, \quad t_i = \sqrt{w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$(v^T w)^2 = (s^T t)^2 \leq \|s\|^2 \|t\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n w_i v_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) = \sum_{i=1}^n w_i v_i^2,$$

donc, on a :

$$v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0, \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^n.$$

D'où f est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.10. (Condition suffisante du seconde ordre pour la convexité stricte). Soient C un sous-ensemble ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Si $\nabla^2 f(x)$ est définie positive pour tout $x \in C$ c'est à dire

$$\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle > 0, \quad \text{pour tout } x \in C \text{ et pour tout } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

alors f est strictement convexe sur C .

Démonstration. La preuve de ce théorème est laissé comme un exercice. □

2.5 Critères pour reconnaître une fonction convexe, strictement convexe, concave et strictement concave

2.5.1 Fonction de deux variables et de classe $\mathcal{C}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Alors, nous avons :

1. Si $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) > 0$ et $\det(\nabla^2 f(x, y)) \geq 0$, alors f est convexe.
2. Si $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) > 0$ et $\det(\nabla^2 f(x, y)) > 0$, alors f est strictement convexe.
3. Si $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) < 0$ et $\det(\nabla^2 f(x, y)) \geq 0$, alors f est concave.
4. Si $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) < 0$ et $\det(\nabla^2 f(x, y)) > 0$, alors f est strictement concave.

5. Si $\det(\nabla^2 f(x, y)) < 0$, alors f est ni convexe et ni concave.

Exemple 2.6. (Quadratique sur linéaire). Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^2/y.$$

La matrice hessienne de f est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ -x/y^2 & x^2/y^3 \end{bmatrix}.$$

On remarque que $\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) > 0$ et $\det(\nabla^2 f(x, y)) = 0$. Donc, la matrice hessienne $\nabla^2 f(x, y)$ est semi-définie positive, donc f est convexe sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 2.7. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4.$$

1. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\nabla^2 f(x, y)$ est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^2$.
3. Que peut dire dans ce cas ?

2.5.2 Méthode des mineurs principaux

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

une matrice carré symétrique. Alors,

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \dots, \Delta_n = \det(A).$$

sont les mineurs principaux de la matrice A .

1. A est définie positive si et seulement si $\Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.
2. A est définie négative si et seulement si $(-1)^k \Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.
3. Si $\Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n-1$ et $\Delta_n \geq 0$, alors A est semi-définie positive.
4. Si $(-1)^k \Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n-1$ et $\Delta_n \geq 0$, alors A est semi-définie négative.
5. Si $\Delta_n < 0$ et si n est pair, alors A est indéfinie.

Exemple 2.8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + axy + 2yz + 2xz.$$

Pour quelles valeurs du paramètre a , la fonction f est elle convexe ?

Nous avons :

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + ay + 2z \\ 4y + ax + 2z \\ 2z + 2y + 2x \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6 & a & 2 \\ a & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

f est convexe sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\nabla^2 f(x, y, z)$ est semi-définie positive pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ c'est à dire

$$\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 24 - a^2 > 0 \text{ et } \det(\nabla^2 f(x, y, z)) = \begin{vmatrix} 6 & a & 2 \\ a & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2a^2 \geq 0.$$

D'où, $a \in [-2, 2]$.

2.6 Opérations sur les fonctions convexes

Théorème 2.11. Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors pour tout $\alpha \geq 0$ αf est une fonction convexe sur C .
2. Si $f_1, f_2, \dots, f_p : C \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes, alors $f_1 + f_2 + \dots + f_p$ est une fonction convexe sur C .

Démonstration. 1. On note $g(x) = \alpha f(x)$. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} g[(1-\lambda)x + \lambda y] &= \alpha f[(1-\lambda)x + \lambda y] \\ &\leq \alpha(1-\lambda)f(x) + \alpha\lambda f(y) \\ &= (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y). \end{aligned}$$

D'où g est convexe sur C .

2. On note $h = f_1 + f_2 + \dots + f_p$. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$f_i[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f_i(x) + \lambda f_i(y), \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, p.$$

En additionnant cette dernière inégalité sur $i = 1, 2, \dots, p$ donne l'inégalité suivante :

$$h[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y).$$

D'où h est convexe sur C . □

Une autre opération importante qui préserve la convexité est le changement linéaire des variables.

Théorème 2.12. Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors, la fonction g définie par :

$$g(x) = f(Ax + b)$$

est une fonction convexe sur le sous-ensemble convexe suivant :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax + b \in C\}.$$

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in D$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 \in D &\Rightarrow \exists y_1 \in C : y_1 = Ax_1 + b, \\ x_2 \in D &\Rightarrow \exists y_2 \in C : y_2 = Ax_2 + b. \end{aligned}$$

Par la convexité de f sur C , nous avons :

$$f[(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \leq (1-\lambda)f(y_1) + \lambda f(y_2).$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} f[(1-\lambda)(Ax_1 + b) + \lambda(Ax_2 + b)] &= f[A((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + b] \\ &\leq (1-\lambda)f(Ax_1 + b) + \lambda f(Ax_2 + b). \end{aligned}$$

Donc,

$$g[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \leq (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2).$$

D'où, g est convexe sur D . □

Exemple 2.9. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}$. Nous supposons que $c \neq 0$. Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\|Ax + b\|^2}{c^T x + d}$$

est convexe sur l'ensemble D défini par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x + d > 0\}.$$

Nous commençons par prouver la convexité de la fonction suivante :

$$h(y, t) = \frac{\|y\|^2}{t}$$

sur l'ensemble convexe suivant :

$$C = \{(y, t) \in \mathbb{R}^{m+1} : y \in \mathbb{R}^m, t > 0\}.$$

Dans ce cas, on note $h = \sum_{i=1}^m h_i$ où

$$h_i(y, t) = \frac{y_i^2}{t}.$$

Grâce Exemple 2.6, la fonction h_i est convexe sur l'ensemble $\{(y_i, t) : y_i \in \mathbb{R}, t > 0\}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m$. Donc, h est convexe sur C .

La fonction f peut être représentée comme

$$f(x) = h(Ax + b, c^T x + d).$$

Par conséquent, f est convexe sur D .

Exemple 2.10. Montrer que les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 3y + e^x$ convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. $g(x, y, z) = e^{x-y+z} + e^{2y} + x$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. $h(x, y) = -\ln(xy)$ sur $C = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Théorème 2.13. Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et convexe sur un intervalle I . On suppose que $f(C) \subset I$. Alors la composition de g avec f définie par :

$$h(x) = g(f(x))$$

est convexe sur C .

Démonstration. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Avec la croissance et la convexité de g , on obtient :

$$\begin{aligned} g(f[(1 - \lambda)x + \lambda y]) &\leq g((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) \\ &\leq (1 - \lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$h[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)h(x) + \lambda h(y).$$

D'où h est convexe sur C . □

Exemple 2.11. Montrer que la fonction h définie par :

$$h(x) = e^{\|x\|^2}$$

est convexe sur $\mathbb{R}^n$. On pose $h(x) = g(f(x))$ où $g(t) = e^t$ est une fonction croissante et convexe sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = \|x\|^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$, donc h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.14. Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_p : C \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexes. Alors, la fonction maximale suivante :

$$f(x) = \max_{i=1,2,\dots,p} f_i(x)$$

est convexe sur C .

Démonstration. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f[(1 - \lambda)x + \lambda y] &= \max_{i=1,2,\dots,p} f_i[(1 - \lambda)x + \lambda y] \\ &\leq \max_{i=1,2,\dots,p} [(1 - \lambda)f_i(x) + \lambda f_i(y)] \\ &\leq (1 - \lambda) \max_{i=1,2,\dots,p} f_i(x) + \lambda \max_{i=1,2,\dots,p} f_i(y) \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

D'où, f est convexe sur C . □

2.7 Ensembles de niveau pour des fonctions convexes

Définition 2.5. (Ensembles de niveau). Soient S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **ensemble de niveau** de f avec le niveau α , le sous-ensemble de S défini par :

$$\mathcal{N}(f, \alpha) = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}.$$

Une propriété fondamentale des fonctions convexes est que leurs ensembles de niveaux sont nécessairement convexes.

Théorème 2.15. Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau $\mathcal{N}(f, \alpha)$ est convexe.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{N}(f, \alpha)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$x, y \in \mathcal{N}(f, \alpha) \Rightarrow f(x) \leq \alpha \text{ et } f(y) \leq \alpha.$$

D'après la convexité de f , on obtient :

$$f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha,$$

donc, on a :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \mathcal{N}(f, \alpha).$$

D'où, $\mathcal{N}(f, \alpha)$ est convexe. □

Exemple 2.12. Soit A est une matrice carré d'ordre n semi-définie positive. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x^T A x + 1)^2 + \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) \leq 3 \right\}$$

est convexe.

On remarque que $D = \mathcal{N}(f, 3)$ où f est une fonction définie par :

$$f(x) = (x^T A x + 1)^2 + \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right).$$

la fonction f est la somme de deux fonctions f_1 et f_2 telles que

$$f_1(x) = (x^T A x + 1)^2 \text{ et } f_2(x) = \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right).$$

D'après Exemple 2.5, la fonction f_2 est convexe. D'autre part, la fonction f_1 est la composition de la fonction $t \mapsto (t + 1)^2$ croissante et convexe, $x \mapsto x^T A x$ convexe (A définie positive) grâce Théorème 2.7. Par conséquent, la fonction f est convexe, donc D est convexe.

Définition 2.6. (Fonctions quasi-convexes). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **quasi-convexe** si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(f, \alpha)$ est convexe.

Exemple 2.13. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

est quasi-convexe. D'après Figure 2.5, la fonction f est non convexe.

D'autre part, nous avons :

$$\mathcal{N}(f, \alpha) = \begin{cases} [-\alpha^2, \alpha^2] & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \emptyset & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

D'où, f est quasi-convexe.

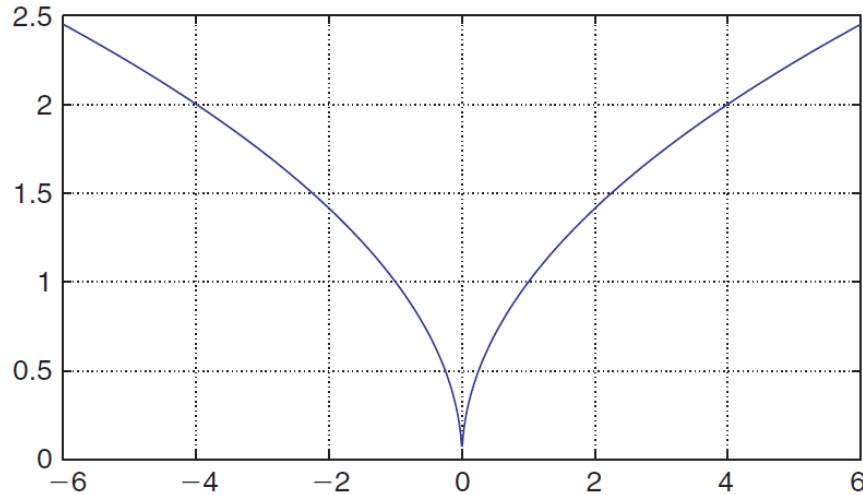


FIGURE 2.5 – Fonction quasi-convexe $x \mapsto \sqrt{|x|}$

Exemple 2.14. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$$

où $a, c \in \mathbb{R}^n$ avec $c \neq 0$ et $b, d \in \mathbb{R}$. Montrer que f est quasi-convexe sur le demi-espace ouvert suivant :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x + d > 0\}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(f, \alpha) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n, c^T x + d > 0 \text{ et } \frac{a^T x + b}{c^T x + d} \leq \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : c^T x + d > 0 \text{ et } (a - \alpha c)^T x + (b - \alpha d) \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : c^T x + d > 0 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (a - \alpha c)^T x + (b - \alpha d) \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

D'où, $\mathcal{N}(f, \alpha)$ est l'intersection de deux demi-espaces, donc $\mathcal{N}(f, \alpha)$ est convexe et par conséquent f est quasi-convexe.

2.8 Convexité et inégalités

Proposition 2.3. (L'inégalité de la moyenne géométrique arithmétique). Pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}. \quad (2.16)$$

Plus généralement, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}. \quad (2.17)$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Jensen sur la fonction $f(x) = \ln(x)$, on obtient pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, nous avons :

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i),$$

donc,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i)} = e^{\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \right)} = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \text{ d'où (2.17)}$$

On pose dans l'inégalité (2.17), $\lambda_i = 1/n$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on obtient (2.16). □

Corollaire 2.1. (Inégalité de Young). Pour tous $s, t \geq 0$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous avons :

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}. \quad (2.18)$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité générale de la moyenne géométrique arithmétique (2.17) pour $n = 2$ et $\lambda_1 = 1/p, \lambda_2 = 1/q$, on obtient pour tout $x, y \geq 0$

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

On pose $x = s^p$ et $y = t^q$, on obtient (2.18). □

Corollaire 2.2. (Inégalité de Hölder). Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous avons :

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Démonstration. Si $x = y = 0$, alors l'inégalité est triviale. On suppose que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Pour tous $i = 1, 2, \dots, n$, en remplaçant dans (2.18)

$$s = \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \quad \text{et} \quad t = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

En additionnant l'inégalité ci-dessus sur $i = 1, 2, \dots, n$ nous obtenons

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|x^T y| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

□

Proposition 2.4. (L'inégalité de Minkowski). Soit $p \geq 1$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Démonstration. Pour $p = 1$, nous avons :

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

Par sommation pour $i = 1, 2, \dots, n$, on trouve l'inégalité concernée. Nous supposons que $p > 1$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$. La fonction $\varphi(t) = t^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0 \text{ pour tout } t > 0$$

Par la convexité de φ , on obtient pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$(\lambda_1 t + \lambda_2 s)^p \leq \lambda_1 t^p + \lambda_2 s^p.$$

On pose

$$\lambda_1 = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}, \quad \lambda_2 = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}, \quad t = \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \quad \text{et} \quad s = \frac{|y_i|}{\|y\|_p}.$$

L'inégalité précédente devienne :

$$\frac{(|x_i| + |y_i|)^p}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \leq \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{|y_i|^p}{\|y\|_p^p}$$

En additionnant l'inégalité ci-dessus sur $i = 1, 2, \dots, n$, on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \leq \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^p}{\|y\|_p^p} = 1.$$

Donc, on a :

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p.$$

Finalement,

$$\|x + y\|_p = \left[\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

□

2.9 Exercices

Exercice 2.1. (Correction 4). Soient E et F deux sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0, \quad F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy \geq 1 \}.$$

Montrer que E et F sont convexes.

Exercice 2.2. (Correction 5). Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On note $z = x + \frac{1}{\alpha}(x - y)$. Montrer que

$$f(y) \geq f(x) + \alpha(f(x) - f(z)).$$

Exercice 2.3. (Correction 6). Soient C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_1, x_2, x_3 \in C$ tel que $x_2 \in [x_1, x_3]$. montrer que si $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, alors

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{\|x_3 - x_2\|} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\|x_2 - x_1\|}.$$

Exercice 2.4. (Correction 7).

1. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ est convexe sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer pour tous $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$, l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Exercice 2.5. (Correction 8). Soit f la fonction de moyenne géométrique définie par :

$$f(x) = \left[\prod_{i=1}^n x_i \right]^{1/n}.$$

1. Montrer que f est concave sur $D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i > 0, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n\}$.
2. La fonction f est strictement concave sur D ?

Exercice 2.6. (Examen final 2016/2017), (Correction 9).

1. Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $\phi(x) = \ln(x)$.

(a) Montrer que ϕ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, (x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe. Montrer que :

$x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$ **si et seulement si** $\nabla F(x^*) = 0$.

Exercice 2.7. (Rattrapage 2016/2017, **Correction** 10).

1. Montrer que la fonction $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \ln(x) - \ln(y)$$

est une fonction convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. En déduire que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{e^{x^2+xy+y^2}}{xy}$$

est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2.8. (Examen final 2017/2018, **Correction** 11).

1. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$E_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) \geq r, r \in \mathbb{R}\}$$

est convexe.

2. Soit $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$.

(a) Montrer que φ est une fonction convexe sur $]0, 1[$.

(b) En déduire que pour tout $a, b, c \in]0, 1[$ tel que $a + b + c = 1$,

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Exercice 2.9. (Rattrapage 2017/2018, **Correction** 12).

1. Montrer que la fonction Φ définie sur $[0, 2]$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est convexe sur $[0, 2]$.

2. Soit $\varphi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln(\ln(x))$.

(a) Montrer que φ est une fonction concave sur $]1, +\infty[$.

(b) En déduire que pour tout $a, b, c \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \sqrt[3]{\ln(a)\ln(b)\ln(c)}.$$

Exercice 2.10. (Examen final 2018/2019, **Correction** 13).

1. Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. Montrer que h est convexe si et seulement si son épigraphe défini par :

$$\text{Epi}(h) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : h(x) \leq t\}$$

est un ensemble convexe.

2. Dédurre que l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : y \geq \ln(1 + e^x)\}$ est convexe.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Montrer l'inégalité suivante :

$$1 + \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} \leq \sqrt[n]{(1 + x_1) \times \dots \times (1 + x_n)}.$$

Exercice 2.11. (Examen final 2018/2019 remplacement, **Correction** 14).

1. Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. Montrer que h est concave si et seulement si son hypographe défini par $\text{Hyp}(h) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : h(x) \geq t\}$ est un ensemble convexe.
2. Dédurre que l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]1, +\infty[: y \leq \ln(\ln(x))\}$ est convexe.
3. Dédurre l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}.$$

Exercice 2.12. (Rattrapage 2018/2019, **Correction** 15). Soit $\varphi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction défini par :

$$\varphi(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Montrer que la fonction φ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Dédurre l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}.$$

Exercice 2.13. (**Correction** 16). Soit f la fonction d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

1. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$F_a(x, y) = f(x - y) + x^2 + axy + y^2.$$

Pour quelles valeurs de a , F_a est-elle convexe ?

Exercice 2.14. (**Correction** 17). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 12xy.$$

Soit Ω l'ensemble défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0; y > 0; xy > 1\}.$$

1. Représenter graphiquement Ω .
2. Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f est strictement convexe sur Ω .
4. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.15. (**Correction** 18). Soit $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + axy + 2yz + 2xz.$$

Pour quelles valeurs du paramètre a , la fonction h est elle convexe ?

Minimisation sans contraintes

Définition 3.1. Un problème de minimisation sans contraintes peut être exprimé de la façon suivante :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in U \end{cases} \quad (3.1)$$

où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

- Les variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont appelés "variables d'optimisation" ou variables de décision.
- La fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction "Coût" ou fonction "objective".

Résoudre le problème (2.1) revient chercher des points de minimum local (ou global, c'est encore mieux !) au sens de la définition suivante :

Définition 3.2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que $x^* \in U$ est un point de minimum local de f si

$$\exists \alpha > 0, f(x^*) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in B(x^*, \alpha) \cap U.$$

2. On dit que $x^* \in U$ est un point de minimum local strict de f si

$$\exists \alpha > 0, f(x^*) < f(x), \text{ pour tout } x \in B(x^*, \alpha) \cap U, x \neq x^*.$$

3. On dit que $x^* \in U$ est un point de minimum global de f si

$$f(x^*) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in U.$$

4. On dit que $x^* \in U$ est un point de minimum global strict de f si

$$f(x^*) < f(x), \text{ pour tout } x \in U, x \neq x^*.$$

Remarque 3.1. 1. Les définitions pour les points de maximum pour la fonction f , en inversant les inégalités précédentes.

2. On dit que x^* est un point d'extrémum de f si x^* est : soit point de minimum de f , soit point de maximum de f .

3. On dit que x^* est un point selle s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f(x_1) < f(x^*) < f(x_2) \text{ avec } x_1, x_2 \in B(x^*, \alpha) \cap U.$$

4. Si x^* est un point de minimum de f sur U , alors $f(x^*)$ est appelé la valeur minimale de f sur U .

Proposition 3.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Les problèmes d'optimisations suivants :

$$\min_{x \in U} f(x) \quad \text{et} \quad \max_{x \in U} (-f(x))$$

sont équivalentes.

2. De plus, nous avons :

$$\min_{x \in U} f(x) = -\max_{x \in U} (-f(x)) \quad \text{et} \quad \max_{x \in U} f(x) = -\min_{x \in U} (-f(x)).$$

Résoudre le problème de minimisation (2.1) revient à chercher le minimum de l'image directe

$$f(U) = \{f(x) / x \in U\}$$

qui est minoré, donc il existe un infimum fini. D'autre part, si $f(U)$ est fermé, cet infimum est un minimum de f .

Il s'agit donc maintenant d'étudier les propriétés f et d'en déduire des résultats d'existence de solution du problème (2.1).

Exemple 3.1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

l'infimum de f est 1 mais $f(0) = 3$, il n'existe pas de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = 1$. Donc, le point de minimum de f n'existe pas.

Exemple 3.2. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = e^{-x}$$

l'infimum de g est 0, mais 0 n'est pas atteint par une valeur finie $x \in \mathbb{R}$. Donc, le point de minimum de g n'existe pas.

3.1 Résultats d'existence et d'unicité d'un point de minimum global

Proposition 3.2. (Suite minimisante / Suite maximisante). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $A \neq \emptyset$. Il existe (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de A telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf(A) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sup(A).$$

La suite (x_n) est appelée "suite minimisante" et (y_n) une "suite maximisante" de A .

Démonstration. Comme $A \neq \emptyset$, nécessairement :

$$\inf(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{et} \quad \sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

1^{er} cas : $\inf(A) \in \mathbb{R}$. Comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A , $\forall n \in \mathbb{N}$, $\inf(A) + 1/n$ n'est pas un minorant de A . Il existe donc un élément $x_n \in A$ tel que

$$\inf(A) \leq x_n \leq \inf(A) + 1/n.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf(A).$$

2nd cas : $\inf(A) = -\infty$. A admet seulement $-\infty$ comme minorant. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ telle que

$$x_n \leq -n.$$

$$\text{donc } x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

La construction de la suite (y_n) est similaire à celle de (x_n) et est laissée en exercice. □

Corollaire 3.1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un fermé non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est minoré alors A admet un minimum et ainsi $\inf(A) = \min(A) \in \mathbb{R}$.
2. Si A est majoré alors A admet un maximum et ainsi $\sup(A) = \max(A) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite minimisante de A , i.e. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf(A).$$

Comme A est fermé, $\inf(A) \in A$ et, par conséquent, $\inf(A)$ est le minimum de A .

La démonstration concernant le maximum est similaire et est laissée en exercice. □

Nous avons le théorème classique de Weierstrass :

Théorème 3.1. (Weierstrass). Soient E un sous-ensemble fermé borné non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E . Alors, f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $x \in E$ point de minimum global de f sur E i.e.

$$\forall y \in E, f(x) \leq f(y).$$

De la même façon, il existe un point de maximum global de f sur E .

Démonstration. Soit (x_n) une suite minimisante dans $f(E)$, i.e. d'éléments de E telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf f(E).$$

Comme E est fermé borné, il existe une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un $x \in E$. Cette suite extraite vérifie

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \quad \text{et} \quad f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf f(E).$$

Or f est continue, d'où par unicité de la limite, il suit

$$f(x) = \inf_{y \in E} f(y) = \min_{y \in E} f(y).$$

et f réalise son minimum sur E . □

Définition 3.3. On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **coercive** si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

c'est à dire

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n, [\|x\| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A]$$

Ici $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.3. – $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est coercive.

– $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^2 - y^2$ n'est pas coercive. En effet, la suite de terme général $x_n = (0, n)$, $n \in \mathbb{N}$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty.$$

Proposition 3.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$f(x) \geq g(\|x\|), \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty.$$

Alors, f est coercive.

Démonstration. Comme $g \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, on a :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0 / \forall t \in \mathbb{R}, t \geq B \Rightarrow g(t) \geq A.$$

On pose $t = \|x\|$, nous obtenons

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0 / \forall t \in \mathbb{R}, t \geq B \Rightarrow f(x) \geq g(\|x\|) \geq A.$$

□

Exemple 3.4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x, y) = g(x^2 + y^2).$$

2. En déduire que f est coercive.

Théorème 3.2. (Existence). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive. Alors, f admet au moins un point de minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et considérons l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq f(a)\}.$$

Il est facile de montrer :

1. E est **fermé**, car

$$E = f^{-1}([-\infty, f(a)]).$$

donc E est l'image inverse d'un intervalle fermé par une fonction continue.

2. E est **borné** : supposons le contraire, alors il existe une suite (x_k) de E avec $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Comme f est coercive sur $\mathbb{R}^n$, ceci entraîne $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc contradiction, car

$$f(x_k) \leq f(a), \forall k \in \mathbb{N}.$$

On déduit alors que E est un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$. Du Théorème de Weierstrass,

$$\exists x^* \in E \text{ tel que } f(x^*) \leq f(x), \forall x \in E.$$

Mais d'autre part, on a

$$f(x^*) \leq f(a) < f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

Ceci prouve que x^* est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$. □

Théorème 3.3. (Condition suffisante d'optimalité globale). Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x^* un point de minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$. Alors, nous avons :

1. Si f est convexe, alors x^* est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si f est strictement convexe, alors x^* est l'unique point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. 1. Par l'absurde : soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point de minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, i.e :

$$\exists r > 0 \text{ } f(x^*) \leq f(y) \text{ pour tout } y \in B(x^*, r). \quad (3.2)$$

et on suppose que x^* n'est pas un point de minimum global, i.e. qu'il existe un point x^+ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x^+) < f(x^*). \quad (3.3)$$

Mais f est convexe sur $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $\alpha \in]0, 1[$, nous avons :

$$f((1-\alpha)x^* + \alpha x^+) \leq (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x^+) = \alpha(f(x^+) - f(x^*)) + f(x^*) < f(x^*).$$

Soient $\alpha = 1/n$ et $y_n = (1 - \frac{1}{n})x^* + \frac{1}{n}x^+$. Nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x^* \quad \text{et} \quad f(y_n) < f(x^*) \Rightarrow x^* \text{ n'est pas un point de minimum local,}$$

d'où contradiction.

2. Raisonnons par l'absurde. Soient x_1 et x_2 deux points de $\mathbb{R}^n$ de minimum global de f avec $x_1 \neq x_2$. Comme f est strictement convexe, nous avons :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &< \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \\ &< \frac{1}{2} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{2} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \end{aligned}$$

Ce qui est impossible. □

Donnons pour terminer un critère pour qu'une fonction soit strictement convexe et coercive :

Corollaire 3.2. (Existence et unicité). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2. \quad (3.4)$$

Alors, il **existe un unique** point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. La condition (2.4) implique que ∇f est strictement monotone et que f est strictement convexe. Enfin f est coercive : en effet, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x)) dt = f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle dt.$$

Donc

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y-x \rangle dt. \quad (3.5)$$

D'après (3.4) on obtient

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_0^1 t\alpha \|y-x\|^2 dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq -\|\nabla f(x)\| \|y-x\|. \quad (3.6)$$

De (3.5) et (3.6), on a :

$$f(y) \geq f(x) - \|\nabla f(x)\| \|y-x\| + \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2. \quad (3.7)$$

Fixons $x = 0$ par exemple ; il est alors clair que f est coercive.

Avec les Théorème 3.2 et Théorème 3.3, f admet un minimum unique x^* sur $\mathbb{R}^n$. □

La condition (3.4) nous amène à la définition suivante :

Définition 3.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **elliptique** si la condition (2.2) est vérifiée, c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

où α est la constante d'ellipticité.

Donnons un critère d'ellipticité

Proposition 3.4. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est elliptique si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2. \quad (3.8)$$

Démonstration. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que la fonction f est elliptique. En utilisant le théorème des accroissements finis sur la fonction g définie par :

$$g(t) = \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in [0, 1].$$

Donc, on a :

$$\langle \nabla f(x), x - y \rangle - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \langle \nabla^2 f(y + \theta(x - y))(x - y), x - y \rangle.$$

où $0 < \theta < 1$. Alors, on a :

$$\langle \nabla^2 f(y + \theta(x - y))(x - y), x - y \rangle = \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

2. On suppose que la condition (2.6) est vérifiée. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral sur la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = f(y + t(x - y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in [0, 1].$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \langle \nabla^2 f(y + t(x - y))(x - y), x - y \rangle dt. \end{aligned}$$

On applique la condition (3.7), on obtient :

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2. \quad (3.9)$$

On permute les variables x et y , on obtient

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2. \quad (3.10)$$

En sommant (3.10) et (3.11) on trouve f est elliptique. □

3.2 Conditions d'optimalité d'un extrémum local

3.2.1 Conditions nécessaires du premier ordre

Théorème 3.4. (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum (est un point de maximum local) de f sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (3.11)$$

Démonstration. Si x^* est un point de minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall x \in B(x^*, \rho), \quad f(x^*) \leq f(x),$$

où $B(x^*, \rho)$ est une boule ouverte de rayon ρ centrée en x^* . On suppose que $\nabla f(x^*) \neq 0$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$; on peut trouver $t_h = \frac{\rho}{\|h\|} > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, t_h[, \quad x^* + th, x^* - th \in B(x^*, \rho),$$

et donc

$$\forall t \in]0, t_h[, \quad f(x^*) \leq f(x^* + th) \quad \text{et} \quad f(x^*) \leq f(x^* - th).$$

Or f est différentiable en x^* , donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t} = \langle \nabla f(x^*), h \rangle \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* - th) - f(x^*)}{t} = \langle \nabla f(x^*), -h \rangle$$

Donc

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x^*), h \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle \nabla f(x^*), -h \rangle \geq 0.$$

c'est-à-dire

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \langle \nabla f(x^*), h \rangle = 0$$

On pose $h = \nabla f(x^*)$, alors on a

$$\|\nabla f(x^*)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$

□

Remarques 3.1. 1. Ce théorème n'a pas de sens si la fonction f n'est pas différentiable.

2. Le théorème précédent donne une condition nécessaire mais non suffisante. En effet : $\nabla f(x^*) = 0$ n'entraîne pas que f atteigne un minimum (ou un maximum) même local, en x^* . Prendre par exemple $x^* = 0$ et la fonction f définie par $f(x) = x^3$ pour s'en convaincre.

Définition 3.5. Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$ est appelé **point critique** ou **point stationnaire**. La relation $\nabla f(x^*) = 0$ est aussi appelée **équation d'Euler**.

Il existe cependant des situations où la relation (2.9) est une condition **nécessaire et suffisante**.

Théorème 3.5. (CNS du premier ordre dans le cas convexe). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et convexe sur $\mathbb{R}^n$. $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\nabla f(x^*) = 0$.

Démonstration. On a vu que la condition est toujours nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$. Comme f est convexe, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = f(x^*).$$

On a donc immédiatement le fait que x^* est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

3.2.2 Conditions du deuxième ordre

Théorème 3.6. (Condition nécessaire du second ordre). Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Nous avons :

1. Si x^* est un point de minimum local de f , alors
 - (a) $\nabla f(x^*) = 0$,
 - (b) $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive.
2. Si x^* est un point de maximum local de f , alors
 - (a) $\nabla f(x^*) = 0$,
 - (b) $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie négative.

Démonstration. 1. a déjà été vue. Montrons 2.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction $\varphi(t) = f(x^* + tx)$. Comme $\nabla f(x^*) = 0$, on obtient :

$$0 \leq f(x^* + tx) - f(x^*) = \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) x, x \rangle + o(t^2).$$

Après division par t^2 , on fait tendre t vers 0 et on a le résultat voulu. $\square$

Exemple 3.5. La réciproque du théorème précédent est fausse. Il suffit de penser des exemples suivants :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3$. Nous avons :

$$f'(t) = 3t^2 \text{ et } f''(t) = 6t.$$

Donc, $f'(0) = f''(0) = 0$. Alors, 0 est un point critique de f mais la dérivée seconde change le signe au voisinage de 0, donc 0 ni minimum ni maximum donc est un point d'inflexion.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

– Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 2xy = 0 \\ -2x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Alors $(0, 0)$ est un point critique de f .

– On a :

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne $\nabla^2 f(0, 0)$ est semi-définie positive puisque ses valeurs propres sont 0 et 2. D'autre part, nous avons :

$$-0.6025 = f(1/2, 1/2) < f(0, 0) < f(0, 1) = 1.$$

Donc, le point critique $(0, 0)$ ni un minimum ni un maximum.

On peut aussi remarquer que f n'est pas coercive puisque $f(n, n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Nous pouvons toutefois donner une réciproque sous forme de condition suffisante du second ordre plus forte (pour un résultat plus faible) de ce qui précède.

Théorème 3.7. (Condition suffisante du second ordre). Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$.

1. Si

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0; \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est définie positive.} \end{cases} \Rightarrow x^* \text{ est un point de minimum local strict de } f \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

2. Si

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0; \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est définie négative.} \end{cases} \Rightarrow x^* \text{ est un point de maximum local strict de } f \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On utilise de nouveau la formule de Taylor appliquée à la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(x^* + tx)$. Nous avons

$$f(x^* + tx) - f(x^*) = \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) x, x \rangle + o(t^2) \geq \frac{t^2}{2} \alpha \|x\|^2 + o(t^2).$$

Ceci montre que x^* réalise un minimum local strict de f . □

3.2.3 Méthode pratique pour $\mathbb{R}^2$

Proposition 3.5. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ un point critique de f . On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \quad \text{et} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*).$$

Nous avons :

1. Si $\det[\nabla^2 f(x^*, y^*)] = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr}(\nabla^2 f(x^*, y^*)) = r + t > 0$, alors (x^*, y^*) est un point de minimum local strict de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Si $\det[\nabla^2 f(x^*, y^*)] = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr}(\nabla^2 f(x^*, y^*)) = r + t < 0$, alors (x^*, y^*) est un point de maximum local strict de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Si $\det[\nabla^2 f(x^*, y^*)] = rt - s^2 < 0$, alors (x^*, y^*) est un point selle de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Si $\det[\nabla^2 f(x^*, y^*)] = rt - s^2 = 0$, alors ne peut rien dire (il faut trouver une méthode différente pour préciser la nature de (x^*, y^*)).

Exemple 3.6. (Examen final : 2015/2016). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy.$$

1. Montrer que la fonction f n'est pas coercive.

2. Calculer $\nabla f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les quatre points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Donner la nature locale de tous les points critiques.

Démonstration. 1. Nous avons :

$$f(x, x) = 2x^3 - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad f(x, x) = 2x^3 - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

Alors, f n'est pas coercive.

2. Le vecteur gradient est :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - y \\ 2xy + x^2 - x \end{pmatrix}$$

3. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ 2xy + x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 2x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } 2y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Alors, les points critiques sont : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1/3, 1/3)$.

4. La matrice hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2y + 2x - 1 & 2x \end{pmatrix}$$

- (a) Pour $(x, y) = (0, 0)$, on a :

$$\det(\nabla^2 f(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

donc, $(0, 0)$ est un point selle.

- (b) Pour $(x, y) = (0, 1)$, on a :

$$\det(\nabla^2 f(0, 1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

donc, $(0, 1)$ est un point selle.

- (c) Pour $(x, y) = (1, 0)$, on a :

$$\det(\nabla^2 f(1, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

donc, $(1, 0)$ est un point selle.

- (d) Pour $(x, y) = (1/3, 1/3)$, on a :

$$\det(\nabla^2 f(1/3, 1/3)) = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/3 > 0 \quad \text{et} \quad r = t = 2/3 > 0$$

donc, $(1/3, 1/3)$ est un point de minimum local.

□

3.3 Fonctions quadratiques

Définition 3.6. On dit fonction quadratique, toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

où A est une matrice carré d'ordre n , $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien.

Proposition 3.6. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

Alors,

1. $f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2} (A + A^T) x - b \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x) = \frac{1}{2} (A + A^T)$$

3. Si A est symétrique, on a :

$$\nabla f(x) = Ax - b \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x) = A.$$

4. Si A est symétrique et semi-définie positive, alors f est une fonction convexe.
5. Si A est symétrique et semi-définie négative, alors f est une fonction concave.
6. Si A est symétrique et définie positive, alors f admet un unique point de minimum global vérifiant le système d'équations linéaires suivant :

$$Ax = b.$$

7. Si A est symétrique et définie négative, alors f admet un unique point de maximum global vérifiant le système d'équations linéaires suivant :

$$Ax = b.$$

3.4 Problème des moindres carrés linéaire

Définition 3.7. Soit A une matrice réelle de taille $m \times n$ avec $m \geq n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On appelle problème des moindres carrés linéaire, tout problème de minimisation sans contraintes définie par :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.1. *Le problème des moindres carrés linéaire (3.12) est équivalent à l'équation normale suivante :*

$$A^T A x = A^T b. \quad (3.13)$$

Démonstration. On pose $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$. On suppose que $x \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$. d'après la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre $\nabla f(x) = 0$. Donc, on a :

$$f(x + th) = \|A(x + th) - b\|^2 = \langle A(x + th) - b, A(x + th) - b \rangle = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + t \langle Ax - b, Ah \rangle + \frac{t^2}{2} \|Ah\|^2$$

Ainsi,

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = 2 \langle Ax - b, Ah \rangle + t \|Ah\|^2,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \langle A^T (Ax - b), h \rangle \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0.$$

Nous avons :

$$\nabla f(x) = A^T (Ax - b) = 0 \Rightarrow A^T A x = A^T b.$$

On suppose que $A^T A x = A^T b$. Nous avons :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, Ay - b = Ax - b + A(y - x).$$

Donc, on a :

$$\langle Ax - b, A(y - x) \rangle = 0 \text{ et } \frac{1}{2} \|Ay - b\|^2 = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \frac{1}{2} \|A(y - x)\|^2 \geq \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

D'où $f(y) \geq f(x)$. □

Théorème 3.8. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'équation normale (3.13) admet au moins une solution. De plus, cette solution est unique si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0\}$.*

Démonstration. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle A^T A x, x \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

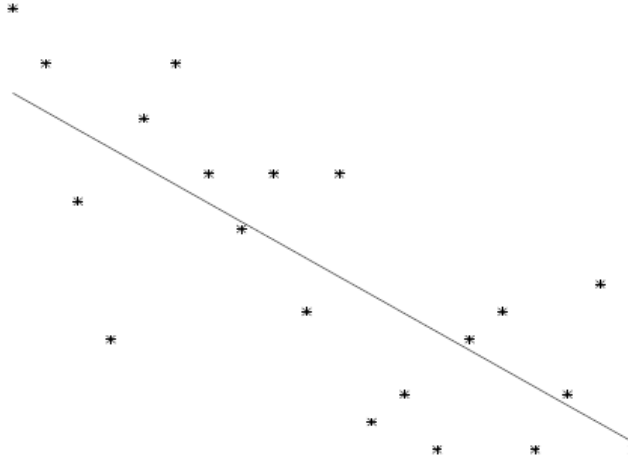
donc, $A^T A$ est une matrice symétrique et semi-définie positive. Alors, l'équation normale admet au moins une solution. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ avec $x_1 \neq x_2$. Nous avons :

$$\begin{cases} A^T A x_1 = A^T b, \\ A^T A x_2 = A^T b. \end{cases} \Rightarrow A^T A x_1 = A^T A x_2 \Rightarrow A^T A (x_1 - x_2) = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\langle A^T A (x_1 - x_2), x_1 - x_2 \rangle = \|A(x_1 - x_2)\|^2 = 0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker}(A) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \square$$

Exemple 3.7. (régression linéaire). Considérons un nuage de n points de $\mathbb{R}^2$: $P_i = (t_i, x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Ces données sont souvent le résultat de mesures et on cherche à décrire le comportement global de ce nuage. En général ces points ne sont pas alignés, mais on décide de chercher une droite les "approchant" au mieux. Comme on n'a pas $x_i = at_i + b$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on cherche à minimiser la somme des carrés des différences. On veut donc trouver un couple de réels (a, b) solution de problème de minimisation sans



contraintes suivant :

$$(Q) : \begin{cases} \min f(a, b) \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. Écrire la fonction objective f .
2. Calculer $\nabla f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
3. On pose

$$S_t = \sum_{i=1}^n t_i ; S_x = \sum_{i=1}^n x_i ; S_{xt} = \sum_{i=1}^n x_i t_i ; S_{t^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2$$

- (a) Pour quelle condition, la fonction f admet un point critique unique, noté par (a^*, b^*) .
- (b) Montrer l'inégalité suivante :

$$nS_{t^2} \geq (S_t)^2.$$

- (c) Montrer que (a^*, b^*) est l'unique solution globale du problème (Q) .

Correction :

1. La fonction objective f est donnée par :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (x_i - at_i - b)^2.$$

2. Calculons le gradient de f en un point quelconque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(at_i + b - x_i)t_i = 2a \sum_{i=1}^n t_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i t_i.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(at_i + b - x_i) = 2a \sum_{i=1}^n t_i + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. (a) Nous avons :

$$(a^*, b^*) \in \mathbb{R}^2 \text{ est un point critique de } f \text{ si et seulement si } \nabla f(a^*, b^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S_{t^2}a + S_tb = S_{xt} \\ S_ta + nb = S_x \end{cases}$$

La résolution de ce système donne une solution unique si $nS_{t^2} - (S_t)^2 \neq 0$. On obtient

$$a^* = \frac{nS_{xt} - S_xS_t}{nS_{t^2} - (S_t)^2} \text{ et } b^* = \frac{S_xS_{t^2} - S_{xt}S_t}{nS_{t^2} - (S_t)^2}.$$

(b) Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$(S_t)^2 = \left[\sum_{i=1}^n t_i \right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n 1^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n t_i^2 \right] \leq n \sum_{i=1}^n t_i^2 = nS_{t^2}$$

Alors,

$$nS_{t^2} \geq (S_t)^2.$$

(c) La matrice hessienne de la fonction f est donnée par :

$$\nabla^2 f(a, b) = 2 \begin{bmatrix} S_{t^2} & S_t \\ S_t & n \end{bmatrix}$$

alors, $\text{tr}(\nabla^2 f(a, b)) = S_{t^2} + n > 0$ et $\det(\nabla^2 f(a, b)) = nS_{t^2} - (S_t)^2 \geq 0$. Donc, au point (a^*, b^*) , la matrice hessienne $\nabla^2 f(a^*, b^*)$ est définie positive, alors f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Donc, (a^*, b^*) est l'unique solution globale du problème (Q).

3.5 Exercices

Exercice 3.1. (Correction 19). Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer l'égalité suivante :

$$\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta).$$

2. Montrer, en considérant $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, que f est coercive.

3. Montrer que f a un minimum global que l'on calculera. Préciser en quels points (x, y) ce minimum est atteint.

4. Une fonction coercive peut-elle admettre un maximum global ?

Exercice 3.2. (Correction 20). Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$h(x, y) = (y - 1)^2 + \sin(x).$$

1. Étudier la coercivité de la fonction h .

2. Trouver les points critiques de la fonction h .

3. Préciser la nature locale de ces points critiques.

Exercice 3.3. (Examen final : 2015/2016, **Correction** 21). Une montagne a la forme de la surface définie par :

$$z(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4 \quad (\text{l'unité de mesure est de 100 mètres.})$$

Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur de la montagne ?

Exercice 3.4. (Rattrapage : 2015/2016, **Correction** 22). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x$$

où α est un paramètre réel donné.

1. Calculer la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{4}$.
3. On pose $\alpha = 1$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point que l'on déterminera.
4. On pose $\alpha = 1/4$.
 - (a) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Est-ce que la fonction f admet un point de minimum global sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.

Exercice 3.5. (Examen final : 2016/2017, **Correction** 23). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

1. Avec l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq \alpha(x^2 + y^2) + \beta.$$
2. La fonction f admette un minimum global sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
3. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
5. Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature.

Exercice 3.6. (Rattrapage : 2016/2017, **Correction** 24).

1. Montrer que la fonction $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \ln(x) - \ln(y)$$

est une fonction convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. En déduire que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{e^{x^2+xy+y^2}}{xy}.$$

est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 3.7. (Rattrapage : 2016/2017, **Correction** 25). Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$h(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. Calculer $\nabla h(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que le seul point critique de h est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

3. Montrer que h présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
4. Montrer que m est le minimum global de h sur $\mathbb{R}^2$.
5. On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\varphi(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

En déduire que φ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 3.8. (Examen final : 2017/2018, **Correction** 26). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas coercive.
2. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle convexe ? Et concave ? Justifier votre réponse.
4. Déterminer les quatre points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
5. Donner la nature locale de tous les points critiques.

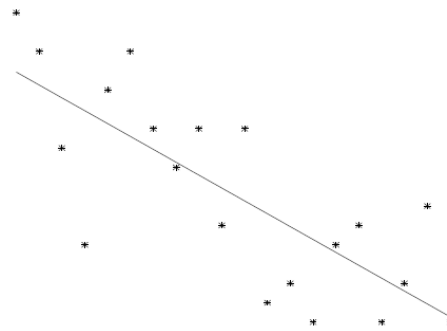
Exercice 3.9. (Rattrapage 2017/2018, **Correction** 27). Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = x(y^2 + \ln^2(x)).$$

1. Montrer que la fonction f n'est pas coercive.
2. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
4. Donner la nature locale de tous les points critiques.
5. La fonction f admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$?

Exercice 3.10. (**Correction** 28).

Considérons un nuage de n points de $\mathbb{R}^2$: $P_i = (t_i, x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Ces données sont souvent le résultat de mesures et on cherche à décrire le comportement global de ce nuage. En général ces points ne sont pas alignés, mais on décide de chercher une droite les "approchant" au mieux. Comme on n'a pas $x_i = at_i + b$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on cherche à minimiser la somme des carrés des différences. On veut donc trouver un couple de réels (a, b) solution de problème de minimisation sans contraintes suivant :



$$(Q) : \begin{cases} \min f(a, b) \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. Écrire la fonction objective f .
2. Calculer $\nabla f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. On pose

$$S_t = \sum_{i=1}^n t_i ; S_x = \sum_{i=1}^n x_i ; S_{xt} = \sum_{i=1}^n x_i t_i ; S_{t^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2$$

- (a) Pour quelle condition, la fonction f admet un point critique unique, noté par (a^*, b^*) .
 (b) Montrer l'inégalité suivante :

$$nS_{t^2} \geq (S_t)^2.$$

- (c) Montrer que (a^*, b^*) est l'unique solution globale du problème (Q).

Exercice 3.11. (Correction 29). On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3$. L'espace $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$ est muni du produit scalaire défini par $\langle h, g \rangle = \int_{-1}^1 h(x)g(x)dx$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée, définie par $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ pour tous $h, g \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$.

On souhaite déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 qui approche le mieux f au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qui minimise $\|f - P\|^2$ parmi tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Modéliser ce problème comme un problème d'optimisation sans contraintes.
2. Écrire la fonction objective sous la forme d'une fonction quadratique.
3. Étudier l'existence et l'unicité des solutions de ce problème.
4. Résoudre ce problème.

Exercice 3.12. (Examen final : 2018/2019, Correction 30). On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

Où a est un paramètre réel donné.

1. Calculer $\nabla f_a(x, y)$ et $\nabla^2 f_a(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a est strictement convexe ?
3. On pose $a = 2$.
 - (a) Montrer que f_a est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Montrer que f_a n'est pas coercive.
 - (c) Montrer que f_a admet un nombre infini des points de minimum global à déterminer.
 - (d) Calculer la valeur minimale de f_a sur $\mathbb{R}^2$.
4. On pose $a > 2$.
 - (a) Calculer les points critiques de f_a .
 - (b) Préciser la nature des points critiques.

Exercice 3.13. (Rattrapage : 2018/2019, Correction 31). On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_a(x, y) = 2x + 2y + axy - x^2 - y^2.$$

Où a est un paramètre réel donné.

1. Calculer $\nabla f_a(x, y)$ et $\nabla^2 f_a(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a est strictement concave ?
3. On pose $a = -2$.
 - (a) Montrer que f_a est concave sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Montrer que f_a admet un nombre infini des points de maximum global à déterminer.
 - (c) Calculer la valeur maximale de f_a sur $\mathbb{R}^2$.

Algorithmes

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la conception de méthodes numériques pour la recherche des points $x^* \in \Omega$ qui réalisent le minimum d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

où f est supposée au moins différentiable sur Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On parle d'optimisation sans contrainte.

Nous commencerons par quelques définitions :

Définition 4.1. (Algorithme). Un **algorithme** est défini par une application $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \Omega$ permettant la génération d'une suite d'éléments d'un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$(P) : \begin{cases} x_0 \in \Omega \text{ donné,} \\ x_{k+1} = \mathcal{A}(x_k). \end{cases}$$

Définition 4.2. (Convergence d'un algorithme). On dit que l'algorithme (P) est **converge** si la suite (x_k) engendrée par l'algorithme converge vers une limite x^* .

Définition 4.3. Soit (x_k) une suite de limite x^* définie par l'algorithme (P) . On dit que la convergence est

1. **linéaire** si l'erreur $e_k = \|x_k - x^*\|$ décroît linéairement :

$$\exists C \in]0, 1[, \exists k_0, \forall k \geq k_0 \quad e_{k+1} \leq C e_k.$$

2. **super-linéaire** si l'erreur e_k décroît de la manière suivante :

$$e_{k+1} \leq \alpha_k e_k,$$

où α_k est une suite positive convergente vers 0. Si α_k est une suite géométrique, la convergence de l'algorithme est dite **géométrique**.

3. **d'ordre p** si l'erreur e_k décroît de la manière suivante :

$$\exists C \geq 0, \exists k_0, \forall k \geq k_0 \quad e_{k+1} \leq C [e_k]^p.$$

Si $p = 2$, la convergence de l'algorithme est dite **quadratique**.

4. Enfin, la convergence est dite **locale** si elle n'a lieu que pour des points de départ x_0 dans un voisinage de x^* . Dans le cas contraire la convergence est globale.

4.1 Méthodes de descente

Définition 4.4. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que $d \in \Omega$ avec $d \neq 0$ est une direction de descente en $x \in \Omega$ s'il existe $\rho_0 > 0$ tel que

$$f(x + \rho d) \leq f(x), \quad \forall \rho \in [0, \rho_0].$$

2. On dit que $d \in \Omega$ avec $d \neq 0$ est une direction de descente stricte en $x \in \Omega$ s'il existe $\rho_0 > 0$ tel que

$$f(x + \rho d) < f(x), \quad \forall \rho \in]0, \rho_0].$$

3. Le principe d'une "méthode de descente" consiste à faire les itérations suivantes

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \quad \rho_k > 0, \quad (4.1)$$

tout en assurant la propriété

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Le vecteur d_k est la direction de descente stricte en x_k . Le scalaire ρ_k est appelé le pas de la méthode à l'itération k .

On peut caractériser les directions de descente en x_k à l'aide du gradient :

Proposition 4.1. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $d \in \Omega$ avec $d \neq 0$. Alors, on a :

1. Si d direction de descente en $x \in \Omega$, alors $\langle d, \nabla f(x) \rangle < 0$.
2. Si $\nabla f(x) \neq 0$ alors $d = -\nabla f(x)$ est une direction de descente stricte en $x \in \Omega$.

Démonstration. 1. Soit $d \in \Omega$ avec $d \neq 0$ une direction de descente en x alors par définition, on a :

$$\exists \rho_0 > 0 \text{ tel que } f(x + \rho d) \leq f(x), \quad \forall \rho \in [0, \rho_0].$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(\rho) = f(x + \rho d).$$

On a φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\varphi'(\rho) = \langle \nabla f(x + \rho d), d \rangle.$$

Comme d est une direction de descente, on peut écrire :

$$\varphi(\rho) \leq \varphi(0), \quad \forall \rho \in [0, \rho_0],$$

et donc

$$\forall \rho \in]0, \rho_0[, \quad \frac{\varphi(\rho) - \varphi(0)}{\rho} \leq 0;$$

en passant à la limite lorsque ρ tend vers 0, on déduit que $\varphi'(0) \leq 0$ c'est-à-dire

$$\langle d, \nabla f(x) \rangle \leq 0.$$

2. Soit $d = -\nabla f(x) \neq 0$. On veut montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\rho \in]0, \rho_0]$ alors

$$f(x + \rho d) < f(x) \text{ ou } \varphi(\rho) < \varphi(0)$$

où φ est la fonction définie en 1. ci-dessus. On a :

$$\varphi'(0) = \langle d, \nabla f(x) \rangle = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0.$$

Comme φ' est continue, il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\rho \in [0, \rho_0]$ alors $\varphi'(\rho) < 0$.

Si $\rho \in]0, \rho_0]$ alors

$$\varphi(\rho) - \varphi(0) = \int_0^\rho \varphi'(t) dt < 0,$$

et on a donc bien

$$\varphi(\rho) < \varphi(0), \quad \forall \rho \in]0, \rho_0],$$

ce qui prouve que d est une direction de descente stricte en x . □

4.2 Méthodes de gradient

Définition 4.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit méthode de gradient, toute méthode de descente définie par la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \text{ donn} \\ x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \end{cases} \quad (4.2)$$

De plus, le choix du pas ρ_k peut être effectué de la manière suivante :

1. Soit $\rho_k = \rho > 0$ est fixé, c'est ce que l'on appelle la méthode du gradient à pas fixe ou constant,
2. Soit ρ_k est choisi comme le minimum de la fonction $\varphi(\rho) = f(x_k - \rho \nabla f(x_k))$. C'est ce que l'on appelle la méthode du gradient à pas optimal.

Algorithme 4.1 (Algorithme du Gradient).

- 1 : Poser $k = 0$
 - 2 : Choisir $x_0, \epsilon > 0$ et k_{Max}
 - 3 : Tant que $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \epsilon$ et $k \leq k_{Max}$ faire
 - 4 : Calculer $d_k = -\nabla f(x_k)$
 - 5 : Calculer ρ_k
 - 6 : Poser $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$.
-

Théorème 4.1. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et x^* est un point de minimum de f . Supposons que

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

et

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

S'il existe deux réels a et b tels que $0 < a < \rho_k < b < \frac{2\alpha}{L^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors la méthode du gradient définie par (4.2) converge pour tout choix de x_0 de façon géométrique, autrement dit

$$\exists \beta \in]0, 1[, \|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|.$$

Exemple 4.1. Utiliser la méthode du gradient à pas fixe avec trois itération pour résoudre le problème suivant :

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 + 4xy - 3x$$

On pose $(x_0, y_0) = (2, 2)$ et $\rho = 1/6$.

Proposition 4.2. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et (x_k) la suite de la méthode du gradient à pas optimal définie par (4.2). Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ le vecteur $x_{k+1} - x_k$ est orthogonal sur le vecteur $x_{k+2} - x_{k+1}$, voir Figure 4.1.

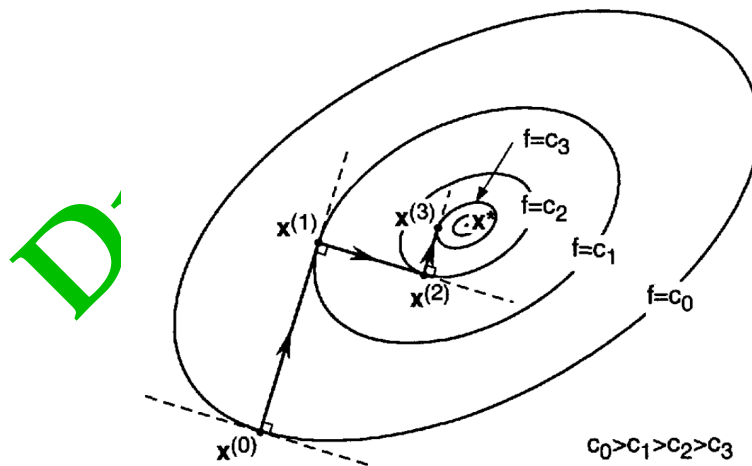


FIGURE 4.1 – Chemin de suite de la méthode du gradient à pas optimal

Démonstration. En utilisant la suite (4.2), on obtient :

$$\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+2} - x_{k+1} \rangle = \rho_k \rho_{k+1} \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_{k+1}) \rangle$$

On introduit la fonction suivante :

$$\varphi(\rho) = f(x_k - \rho \nabla f(x_k)),$$

on a :

$$\varphi'(\rho) = -\langle \nabla f(x_k - \rho \nabla f(x_k)), \nabla f(x_k) \rangle.$$

et puisque ρ_k est le point de minimum de φ , donc d'après la condition nécessaire de premier ordre on a :

$$0 = \varphi'(\rho_k) = -\langle \nabla f(x_k - \rho_k \nabla f(x_k)), \nabla f(x_k) \rangle = -\langle \nabla f(x_{k+1}), \nabla f(x_k) \rangle.$$

D'où

$$\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+2} - x_{k+1} \rangle = 0.$$

□

Remarque 4.1. 1. Grâce Proposition 4.2, le vecteur gradient $\nabla f(x_k)$ est parallèle au vecteur tangente de plan du niveau $\{x, f(x) = f(x_{k+1})\}$ au point x_{k+1} .

2. La suite $(f(x_k))$ est strictement décroissante.

Proposition 4.3. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et (x_k) la suite de la méthode du gradient à pas optimal définie par (4.2). Si $\nabla f(x_k) \neq 0$, alors $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Démonstration. On pose $\varphi(\rho) = f(x_k - \rho \nabla f(x_k))$ avec $\rho > 0$. Alors, d'après (4.2), on a :

$$\varphi(\rho_k) \leq \varphi(\rho).$$

D'autre part, nous avons :

$$\varphi'(0) = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0.$$

Donc, il existe $\bar{\rho} > 0$ tel que

$$\varphi(0) > \varphi(\rho), \text{ pour tout } \rho \in]0, \bar{\rho}].$$

Alors, on a :

$$f(x_{k+1}) = \varphi(\rho_k) \leq \varphi(\bar{\rho}) < \varphi(0) = f(x_k).$$

□

Remarque 4.2. Grâce Proposition 4.3, nous avons les critères d'arrêts suivants :

1. $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon,$
2. $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \epsilon,$
3. $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon.$

4.2.1 Pas optimal : cas quadratique

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

où A est une matrice carré d'ordre n , symétrique et définie positive. $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a :

$$\nabla f(x) = Ax - b \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x) = A.$$

Soit $\varphi(\rho) = f(x_k - \rho g_k)$ avec $g_k = \nabla f(x_k)$. Le pas optimal ρ_k est caractérisé par :

$$\varphi'(\rho_k) = 0.$$

donc, on a :

$$\langle \nabla f(x_k - \rho_k g_k), g_k \rangle = 0,$$

donc, on obtient :

$$\rho_k = \frac{\langle g_k, g_k \rangle}{\langle Ag_k, g_k \rangle} = \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T Ag_k} > 0.$$

La méthode du gradient à pas optimal peut donc s'écrire (dans le cas quadratique)

$$\begin{cases} g_k = Ax_k - b, \\ \rho_k = \frac{\|g_k\|^2}{g_k^T Ag_k}, \\ x_{k+1} = x_k - \rho_k g_k. \end{cases} \quad (4.3)$$

Exemple 4.2. Résoudre le problème suivant :

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = x^2 + y^2$$

avec point de départ $(x,y) = (1,1)$. Nous avons :

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)^T, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Donc, $g_0 = (2, 2)^T$, $\rho_0 = \|g_0\|^2 / g_0^T \nabla^2 f(1,1) g_0 = 1/2$ et

$$(x_1, y_1)^T = (x_0, y_0)^T - \rho_0 g_0 = (1, 1)^T - \frac{1}{2} (2, 2)^T = (0, 0)^T.$$

La méthode converge vers le point de minimum global $(0, 0)$ pour une seule itération.

Exemple 4.3. Résoudre le problème suivant :

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{x^2}{5} + y^2$$

avec point de départ $(x,y) = (1,1)$.

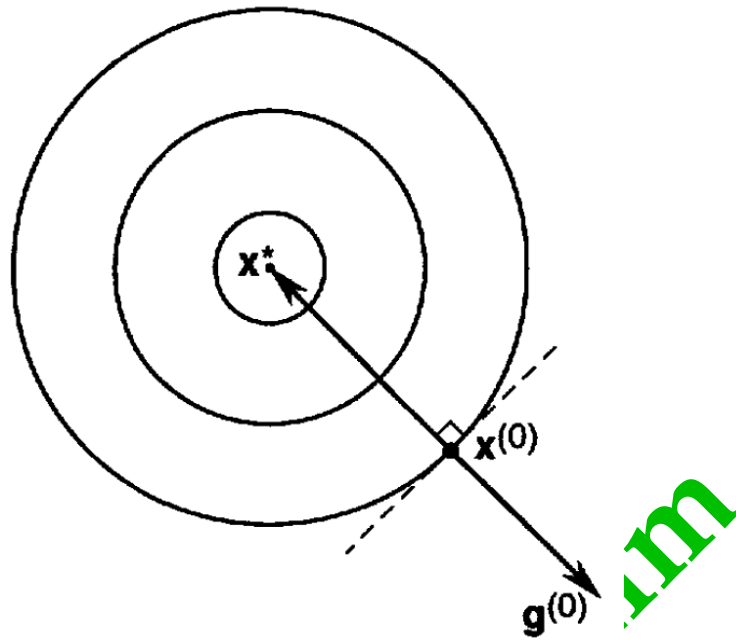


FIGURE 4.2 – Méthode du gradient à pas optimal pour $f(x, y) = x^2 + y^2$

4.2.2 Convergence

Pour étudier la convergence de la suite (4.3), nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

où A est une matrice carré d'ordre n , symétrique et définie positive. Donc, la fonction f admet un unique point de minimum global x^* tel que $Ax^* = b$. Soit (x_k) la suite de la méthode du gradient à pas optimal définie par (4.2). On pose $E(x_k) = f(x_k) - f(x^*) = \frac{1}{2} \langle A(x_k - x^*), x_k - x^* \rangle$. Nous avons :

$$E(x_{k+1}) = \left(1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)} \right) E(x_k) \quad (4.4)$$

Démonstration. On pose $y_k = x_k - x^*$. Nous avons :

$$\frac{E(x_k) - E(x_{k+1})}{E(x_k)} = \frac{2\rho_k g_k^T A y_k - \rho_k^2 g_k^T A g_k}{y_k^T A y_k}.$$

Donc, $A y_k = A x_k - A x^* = A x_k - b = g_k$, nous avons :

$$\frac{E(x_k) - E(x_{k+1})}{E(x_k)} = \frac{\frac{2(g_k^T g_k)^2}{g_k^T A g_k} - \frac{(g_k^T g_k)^2}{g_k^T A g_k}}{g_k^T A^{-1} g_k} = \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T A g_k)(g_k^T A^{-1} g_k)}.$$

□

Pour déterminer le taux de convergence, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.2. (Inégalité de Kantorovich). Soit A une matrice carré d'ordre n , symétrique et définie positive. Pour tout vecteur $x \neq 0$, nous avons :

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}. \quad (4.5)$$

Où λ_1 et λ_n sont respectivement les plus petites et les plus grandes valeurs propres de A .

Démonstration. Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A . Avec changement de repère, la matrice A devienne une matrice diagonale telles que les éléments diagonaux sont les valeurs propres du matrice A c'est à dire $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Donc, nous avons :

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 / \lambda_i)\right)} = \frac{1 / \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i / \lambda_i)},$$

où $\alpha_i = x_i^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2$. D'autre part, on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = \beta_1 \lambda_1 + \beta_n \lambda_n \text{ et } \sum_{i=1}^n (\alpha_i / \lambda_i) = \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_n}{\lambda_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - \beta_1 \lambda_1 - \beta_n \lambda_n}{\lambda_1 \lambda_n} \text{ avec } \beta_1 + \beta_n = 1.$$

On pose $\beta_1 \lambda_1 + \beta_n \lambda_n = \lambda$, on obtient :

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T A x)(x^T A^{-1} x)} \geq \min_{\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n} \frac{\lambda_1 \lambda_n}{\lambda (\lambda_1 + \lambda_n - \lambda)} = \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}.$$

□

Avec Lemme 4.1 et Lemme 4.2, nous avons le théorème de convergence suivant :

Théorème 4.2. (Convergence).

1. Nous avons

$$E(x_{k+1}) \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^2 E(x_k) \quad (4.6)$$

2. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la méthode du gradient à pas optimal (4.2) pour les fonctions quadratiques converge vers au point de minimum global x^* de f .

Démonstration. 1. En utilisant Lemme 4.1 et Lemme 4.2, on obtient :

$$E(x_{k+1}) \leq \left(1 - \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}\right) E(x_k) = \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^2 E(x_k).$$

2. On peut démontrer par récurrence que

$$E(x_k) \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^{2k} E(x_0),$$

A est définie positive, alors on a :

$$\lambda_1 \|x_k - x^*\|^2 \leq E(x_k) \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^{2k} E(x_0).$$

Par passage à la limite, on obtient $x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^*$.

□

4.3 Méthodes de direction conjuguée

Définition 4.6. (Vecteurs conjugués). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1. Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sont dits A -conjugués si

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = 0.$$

2. Une famille $\{d_1, \dots, d_m\}$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est dite A -conjuguée si

$$\langle d_i, Ad_j \rangle = 0$$

pour tout $i, j = 1, \dots, m$ tel que $i \neq j$.

Lemme 4.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Si les vecteurs $d_0, d_1, \dots, d_m$, $m \leq n-1$, sont des vecteurs non nul A -conjugués, alors ils sont linéairement indépendants.

Démonstration. Supposons que $\{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ est une famille A -conjuguée, i.e.

$$d_i \neq 0 \forall i \text{ et } \langle d_i, Ad_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i w_i = 0$$

donc, on a :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \langle d_i, Ad_j \rangle = 0$$

et donc

$$\alpha_j \langle d_j, Ad_j \rangle = 0.$$

Or $\langle d_j, Ad_j \rangle \neq 0$ car $d_j \neq 0$ et A est symétrique définie positive. On en déduit que $\alpha_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$. La famille $\{d_0, \dots, d_m\}$ est donc libre. □

Exemple 4.4. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

On remarque que A est symétrique et définie positive puisque toutes les mineurs principaux sont strictement positive c'est à dire

$$\Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Notre but est de construire un ensemble de vecteurs A -conjugués d_1, d_2 et d_3 .

Soit $d_0 = (1, 0, 0)^T$, $d_1 = (x, y, z)^T$ et $d_2 = (\alpha, \beta, \gamma)^T$. Si $d_0^T A d_1 = 0$, alors on a :

$$d_0^T A d_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3x + z.$$

Soient $x = 1, y = 0$ et $z = -3$. Alors, $d_1 = (1, 0, 3)^T$.

Pour trouver le troisième vecteur $d_2 = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ qui serait A -conjugué avec d_0 et d_1 , nous avons :

$$\begin{cases} d_0^T A d_2 = 3\alpha + \gamma = 0, \\ d_1^T A d_2 = -6\beta - 8\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d_2 = (1, 4, -3)^T.$$

Remarque 4.3. La méthode ci-dessus pour trouver des vecteurs A -conjugués n'est pas efficace. Une procédure systématique pour trouver des vecteurs A -conjugués peut être conçue en utilisant l'idée sous-adjacente au processus de Gram-Schmidt de transformer une base donnée de $\mathbb{R}^n$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

4.3.1 Algorithme de la direction conjuguée

Nous présentons maintenant l'algorithme de direction conjuguée pour minimiser la fonction quadratique de n variables :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Définition 4.7. (Algorithme de la direction conjuguée). L'algorithme de la direction conjuguée est définie par un point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, n vecteurs A -conjugués et pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned} g_k &= \nabla f(x_k) = Ax_k - b, \\ \alpha_k &= -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T A d_k}, \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k. \end{aligned}$$

Théorème 4.3. Pour tout point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'algorithme de la direction conjuguée converge vers l'unique x^* (qui résout $Ax = b$) en n étapes ; c'est-à-dire $x_n = x^*$.

Démonstration. Considérons $x_* - x_0 \in \mathbb{R}^n$. Puisque les vecteurs $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ sont linéairement indépendants, donc il existe des constantes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_* - x_0 = \beta_0 d_0 + \beta_1 d_1 + \dots + \beta_{n-1} d_{n-1}. \quad (4.7)$$

En multipliant les deux côtés de l'équation (4.7) par $d_k^T A$ avec $k = 0, 1, \dots, n-1$, on obtient :

$$d_k^T A (x_* - x_0) = \beta_k d_k^T A d_k,$$

où les termes $d_k^T A d_i = 0$, pour tout $k \neq i$, par la propriété A -conjuguée. Par conséquent,

$$\beta_k = \frac{d_k^T A (x_* - x_0)}{d_k^T A d_k}.$$

Nous pouvons écrire,

$$x_k = x_0 + \alpha_0 d_0 + \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_{k-1} d_{k-1}.$$

Donc,

$$x_k - x_0 = \alpha_0 d_0 + \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_{k-1} d_{k-1}. \quad (4.8)$$

Ainsi écrire

$$x^* - x_0 = (x^* - x_k) + (x_k - x_0),$$

et en multipliant ci-dessus par $d_k^T A$, nous obtenons :

$$d_k^T A (x^* - x_0) = d_k^T A (x^* - x_k) + d_k^T A (x_k - x_0) = -d_k^T g_k,$$

car $g_k = Ax_k - b$ et $Ax^* = b$. Ainsi,

$$\beta_k = -\frac{d_k^T g_k}{d_k^T A d_k} = \alpha_k \quad (4.9)$$

Grâce (4.7), (4.8) et (4.9) on obtient $x_n = x^*$. □

Exemple 4.5. Trouver le point de minimum global de la fonction quadratique suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x - x^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

En utilisant la méthode de la direction conjuguée avec le point initial $x_0 = (0, 0)^T$ et les directions conjuguées sont $d_0 = (1, 0)^T$ et $d_1 = (-3/8, 3/4)^T$.

Nous avons :

$$g_0 = Ax_0 - b = (1, -1)^T,$$

et donc

$$\alpha_0 = -\frac{g_0^T d_0}{d_0^T A d_0} = -\frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver x_2 , nous calculons

$$g_1 = Ax_1 - b = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix},$$

et

$$\alpha_1 = -\frac{g_1^T d_1}{d_1^T A d_1} = -\frac{\begin{bmatrix} 0 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/8 \\ 3/4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -3/8 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/8 \\ 3/4 \end{bmatrix}} = 2.$$

Donc,

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3/8 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Parce que f est une fonction quadratique de deux variables, $x_2 = x^*$.

Pour une fonction quadratique de n variables, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.4. Dans l'algorithme de direction conjuguée, nous avons :

$$g_{k+1}^T d_i = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ et } i = 0, 1, \dots, k.$$

Démonstration. On note que

$$A(x_{k+1} - x_k) = Ax_{k+1} - b - (Ax_k - b) = g_{k+1} - g_k,$$

puisque $g_k = Ax_k - b$. Ainsi,

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k A d_k.$$

Nous prouvons le lemme par récurrence. Pour $k = 0$, nous avons :

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{g_0^T d_0}{d_0^T A d_0} \right) d_0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} g_1^T d_0 &= (Ax_1 - b)^T d_0 \\ &= x_0^T A d_0 - \left(\frac{g_0^T d_0}{d_0^T A d_0} \right) d_0^T A d_0 - b^T d_0 \\ &= g_0^T d_0 - g_0^T d_0 = 0. \end{aligned}$$

On suppose que $g_k^T d_i = 0$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$. Soit $k \geq 1$ fixé et $i = 0, \dots, k-1$, nous avons :

$$g_{k+1}^T d_i = g_k^T d_i + \alpha_k d_k^T A d_i = 0$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
 g_{k+1}^T d_k &= (Ax_{k+1} - b)^T d_k \\
 &= \left[x_k - \left(\frac{g_k^T d_k}{d_k^T A d_k} \right) d_k \right]^T A d_k - b^T d_k \\
 &= (Ax_k - b)^T d_k - g_k^T d_k \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, par récurrence, pour tous $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq i \leq k$, $g_{k+1}^T d_i = 0$. $\square$

4.3.2 Algorithme de gradient conjugué

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

L'algorithme de gradient conjugué est résumé ci-dessous.

Algorithme 4.2 (Algorithme du gradient conjugué).

- 1 : Poser $k = 0$, sélectionner le point initial x_0 .
- 2 : Calculer $g_0 = Ax_0 - b$. Si $g_0 = 0$, stop, sinon poser $d_0 = -g_0$.
- 3 : Calculer $\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T A d_k}$.
- 4 : Calculer $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.
- 5 : Poser $g_{k+1} = Ax_{k+1} - b$. Si $g_{k+1} = 0$, stop.
- 6 : Calculer $\beta_k = \frac{g_{k+1}^T A d_k}{d_k^T A d_k}$.
- 7 : Calculer $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$.
- 8 : Poser $k := k + 1$; aller à l'étape 3.

Proposition 4.4. Dans l'algorithme de gradient conjugué, les directions $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ sont conjuguées.

Démonstration. Nous montrons par récurrence. Nous montrons d'abord $d_0^T A d_1 = 0$. Dans ce cas, nous écrivons :

$$d_0^T A d_1 = d_0^T A (-g_1 + \beta_0 d_0).$$

En remplaçant

$$\beta_0 = \frac{g_1^T A d_0}{d_0^T A d_0}$$

Dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$d_0^T A d_1 = d_0^T A (-g_1 + \beta_0 d_0) = d_0^T A \left(-g_1 + \frac{g_1^T A d_0}{d_0^T A d_0} d_0 \right) = -d_0^T A g_1 + g_1^T A d_0 = 0.$$

Nous supposons maintenant que $d_0, d_1, \dots, d_k, k < n-1$ sont des directions conjuguées. Du Lemme 4.4, nous avons :

$$g_{k+1}^T d_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (4.10)$$

Nous montrons maintenant que

$$g_{k+1}^T g_j = 0, \text{ pour tout } j = 0, 1, \dots, k.$$

Pour $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ fixé, nous avons :

$$d_j = -g_j + \beta_{j-1} d_{j-1}. \quad (4.11)$$

En substituant (4.11) dans (4.10), on obtient :

$$g_{k+1}^T d_j = 0 = -g_{k+1}^T g_j + \beta_{j-1} g_{k+1}^T d_{j-1}.$$

D'après (4.10), on a $g_{k+1}^T d_{j-1} = 0$, donc $g_{k+1}^T g_j = 0$.

Nous sommes maintenant prêts à montrer que

$$d_{k+1}^T A d_j = 0, \text{ pour tout } j = 0, 1, \dots, k.$$

Nous avons :

$$d_{k+1}^T A d_j = (-g_{k+1} + \beta_k d_k)^T A d_j.$$

Si $j < k$, alors $d_k^T A d_j = 0$, en vertu l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, nous avons :

$$d_{k+1}^T A d_j = -g_{k+1}^T A d_j.$$

Mais $g_{j+1} = g_j + \alpha_j A d_j$. Car $g_{k+1}^T g_i = 0, i = 0, 1, \dots, k$,

$$d_{k+1}^T A d_j = \frac{-g_{k+1}^T (g_{j+1} - g_j)}{\alpha_j} = 0.$$

Ainsi,

$$d_{k+1}^T A d_j = 0, \text{ pour tout } j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Il reste à montrer que $d_{k+1}^T A d_k = 0$. Nous avons :

$$d_{k+1}^T A d_k = (-g_{k+1} + \beta_k d_k)^T A d_k.$$

En utilisant l'expression de β_k , on obtient :

$$d_{k+1}^T A d_k = (-g_{k+1} + \beta_k d_k)^T A d_k = \left(-g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T A d_k}{d_k^T A d_k} d_k \right)^T A d_k = 0.$$

□

Exemple 4.6. On considère la fonction quadratique suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - 3x_1 - x_3.$$

Nous trouvons le point de minimum par l'algorithme de gradient conjugué, en utilisant le point de départ $x_0 = (0, 0, 0)^T$.

Nous pouvons représenter f comme :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b.$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$g(x) = \nabla f(x) = Ax - b = (3x_1 + x_3 - 3, 4x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1)^T.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g_0 &= (-3, 0, -1)^T, \\ d_0 &= -g_0, \\ \alpha_0 &= -\frac{g_0^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{10}{36} = 0.2778, \end{aligned}$$

et

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = (0.8333, 0, 0.2778)^T.$$

L'étape suivante donne

$$\begin{aligned} g_1 &= \nabla f(x_1) = (-0.2222, 0.5556, 0.6667)^T, \\ \beta_0 &= \frac{g_1^T A d_0}{d_0^T A d_0} = 0.08025. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0 = (0.4630, -0.5556, -0.5864)^T.$$

Par conséquent,

$$\alpha_1 = -\frac{g_1^T d_1}{d_1^T A d_1} = 0.2187,$$

et

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = (0.9364, -0.1215, 0.1495)^T.$$

Pour effectuer la troisième itération, nous calculons

$$\begin{aligned} g_2 &= \nabla f(x_2) = (-0.04673, -0.1869, 0.1402)^T, \\ \beta_1 &= \frac{g_2^T A d_1}{d_1^T A d_1} = 0.07075, \\ d_2 &= -g_2 + \beta_1 d_1 = (0.07948, 0.1476, -0.1817)^T. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\alpha_2 = -\frac{g_2^T d_2}{d_2^T A d_2} = 0.8231,$$

et

$$x_3 = x_2 + \alpha_2 d_2 = (1, 0, 0)^T.$$

On remarque que $g_3 = \nabla f(x_3) = 0$. Comme prévu, parce que f est une fonction quadratique de trois variables. Par conséquent, $x^* = x_3$.

4.4 Méthode de Newton

Définition 4.8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La méthode de Newton est une méthode itérative ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Où $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive pour tout k .

Algorithme 4.3 (Algorithme du gradient conjugué).

1: x_0 est donné et $\epsilon > 0$.

2: Calculer la direction de Newton d_k qui est la solution du système linéaire suivant :

$$\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k).$$

3: Calculer

$$x_{k+1} = x_k + d_k.$$

4: Si $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \epsilon$, stop, sinon aller à l'étape 1.

Exemple 4.7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Alors, la fonction f admet un point de minimum global unique $x^* = 0$.

la suite de la méthode de Newton est donnée par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - x_k (1+x_k^2) = -x_k^3.$$

– Si $|x_0| \geq 1$, alors la méthode de Newton est divergente.

– Si $|x_0| < 1$, alors la méthode de Newton est convergente vers la solution $x^* = 0$.

Pour la convergence de la méthode de Newton, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.5. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point critique de f . Nous avons :

$$\nabla f(x) = \int_0^1 \nabla^2 f[x^* + t(x-x^*)](x-x^*) dt. \quad (4.12)$$

Démonstration. On pose $g(t) = \nabla f[x^* + t(x - x^*)]$. Nous avons :

$$g'(t) = \nabla^2 f[x^* + t(x - x^*)](x - x^*).$$

Alors,

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt.$$

Donc,

$$\nabla f(x) = \int_0^1 \nabla^2 f[x^* + t(x - x^*)](x - x^*) dt.$$

□

Théorème 4.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que :

1. Il existe $\alpha > 0$ tel que $h^T \nabla^2 f(x) h \geq \alpha \|h\|^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$.
2. Il existe $L > 0$ tel que $\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L \|x - y\|$.

Soient (x_k) la suite de la méthode de Newton et x^* l'unique point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$. Alors, nous avons :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{L}{2\alpha} \|x_k - x^*\|^2. \quad (4.13)$$

De plus, si $\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\alpha}{L}$ alors :

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{2\alpha}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}. \quad (4.14)$$

Nous prouvons maintenant Théorème 4.4.

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} ([\nabla^2 f(x_k)](x_k - x^*) - \nabla f(x_k)) \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left([\nabla^2 f(x_k)](x_k - x^*) - \int_0^1 \nabla^2 f[x^* + t(x_k - x^*)](x_k - x^*) dt \right) \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + t(x_k - x^*))](x_k - x^*) dt. \end{aligned}$$

Avec les hypothèses de théorème, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\| \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + t(x_k - x^*))\| \|x_k - x^*\| dt \\ &\leq \|[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\| \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + t(x_k - x^*))\| \|x_k - x^*\| dt \\ &\leq \frac{L}{\alpha} \int_0^1 t \|x_k - x^*\|^2 dt = \frac{L}{2\alpha} \|x_k - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Montrons (4.14) par récurrence. Pour $k = 0$, nous avons :

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\alpha}{L} = \frac{2\alpha}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}.$$

On suppose que (4.14) est vrai pour k c'est à dire

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{2\alpha}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}$$

et on montrons pour $k + 1$. Avec (4.13), nous avons :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{L}{2\alpha} \|x_k - x^*\|^2 \leq \frac{L}{2\alpha} \left[\frac{2\alpha}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} \right]^2 = \frac{2\alpha}{L} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}.$$

□

Exemple 4.8. On considère le problème suivant :

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 5)^4.$$

1. On pose $x^k = (x_1^k, x_2^k)$. Avec la méthode Newton, montrer la formule de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x^{k+1} = \frac{1}{3} \left(2x^k + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

2. Soit $x^0 = (0, 0)^T$,

- (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, x^k = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- (b) Dédurre le point de minimum de f .
- (c) Tracer dans un repère Cartésien (x, y) , les points $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^*$.

Solution : Nous avons :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 \\ 4(x_2 - 5)^3 \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 & 0 \\ 0 & 12(x_2 - 5)^2 \end{bmatrix}$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \left[\nabla^2 f(x_1^k, x_2^k) \right]^{-1} \nabla f(x_1^k, x_2^k) \\ &= x^k - \begin{bmatrix} \frac{1}{12(x_1^k - 2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12(x_2^k - 5)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4(x_1^k - 2)^3 \\ 4(x_2^k - 5)^3 \end{bmatrix} \\ &= x^k - \frac{1}{3} x^k + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \left(2x^k + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

2. On pose $x^0 = (0, 0)^T$.

(a) montrons par récurrence. Pour $k = 0$ est trivial. On suppose que

$$x^k = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et on montre pour $k + 1$. Nous avons :

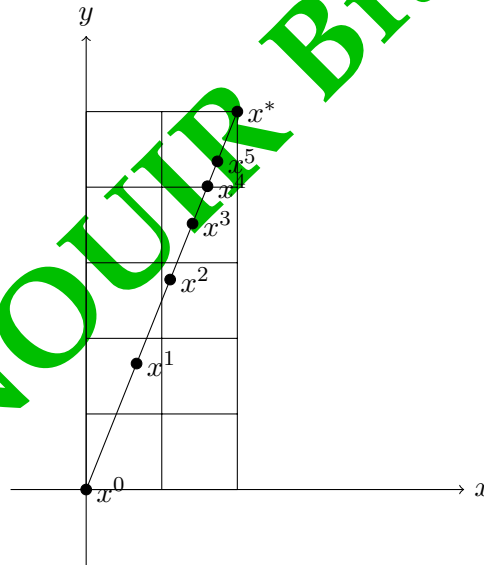
$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \frac{1}{3} \left(2x^k + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) le point de minimum de f est

$$x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned} x^1 &= (2/3, 5/3)^T, \quad x^2 = (10/9, 25/9), \quad x^3 = (38/27, 95/27)^T, \\ x^4 &= (130/81, 325/81), \quad x^5 = (422/243, 1055/243). \end{aligned}$$



4.5 Exercices

Exercice 4.1. (Examen final : 2015/2016, **Correction** 32). Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On note $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, les valeurs propres de A telles que : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que la fonction g est coercive.
3. Calculer $\nabla g(x)$ et $\nabla^2 g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
4. Montrer que g possède un unique point de minimum global sur $\mathbb{R}^n$ noté x^* .
5. On considère la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x^{k+1} = x^k - \rho \nabla g(x^k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

où ρ est un réel positif fixé.

- (a) Soit $e^k = x^k - x^*$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre e^{k+1} et e^k .
- (b) Montrer que si $0 < \alpha < 2/\lambda_n$, alors la suite (x^k) est convergente vers x^* .

Exercice 4.2. (Examen final : 2016/2017, **Correction** 33). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

1. Avec l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq \alpha(x^2 + y^2) + \beta.$$

2. La fonction f admette un minimum global sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
3. Calculer $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
5. Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature.

Exercice 4.3. (Rattrapage : 2016/2017, **Correction** 34). Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$h(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. Calculer $\nabla h(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que le seul point critique de h est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
3. Montrer que h présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
4. Montrer que m est le minimum global de h sur $\mathbb{R}^2$.
5. On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\varphi(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

En déduire que φ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 4.4. (Examen final : 2017/2018, **Correction** 35). On considère la matrice et le vecteur suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, et la fonction quadratique suivante :

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer le déterminant et la trace de la matrice A .
2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A ?
3. Pour quelles valeurs de α , la fonction g admet-elle un unique point de minimum global ? Justifier votre réponse.
4. Calculer le gradient de g .
5. On pose $|\alpha| < 2$ et soit $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ la suite de la méthode de gradient à pas optimal définie par :

$$\begin{cases} d_k = -\nabla g(x^k), \\ \rho_k = \frac{\|d_k\|^2}{d_k^T A d_k}, \\ x^{k+1} = x^k + \rho_k d_k. \end{cases}$$

(a) Soit $x^0 = \left(\frac{3}{2+\alpha}, \frac{3}{2+\alpha}\right)$. Calculer x^1 .

(b) En déduire que x^1 est l'unique point de minimum global de g .

Exercice 4.5. (Rattrapage : 2017/2018, **Correction** 36). On considère la matrice et le vecteur suivants :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et la fonction quadratique suivante :

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^2$

1. Calculer le déterminant et la trace de la matrice A .
2. Déduire les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A , où λ_1 est la plus petite valeur propre de A et λ_2 est la plus grande valeur propre de A .
3. Pour quelles valeurs de α , la fonction g admet-elle un unique point de minimum global ?
4. Calculer le gradient de g .
5. On pose $\alpha > 2$ et soit $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ la suite de la méthode de gradient à pas fixe définie par :

$$x^{k+1} = x^k - \rho \nabla g(x^k) \quad \text{où} \quad \rho = \frac{1}{\lambda_2}$$

(a) Avec le point de départ $x^0 = (1, 1)$, Calculer x^1 .

(b) Vérifier que x^1 est le point de minimum global de la fonction g sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.6. (Examen final : 2018/2019, **Correction** 37). Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de Rosenbrock définie par :

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + 10(x^2 - y)^2.$$

1. Calculer $\nabla g(x, y)$ et $\nabla^2 g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. La fonction g est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Et concave sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
3. Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $z^k = (x^k, y^k)^T$ la suite de la méthode de Newton définie par :

$$z^{k+1} = z^k - \left[\nabla^2 g(z^k) \right]^{-1} \nabla g(z^k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

- (a) Pour $z^0 = (x^0, y^0)^T = (0, 0)^T$, calculer z^1 et z^2 .
 (b) Montrer que z^2 est l'unique point de minimum global de g sur $\mathbb{R}^2$.

Indication : Si A est une matrice d'ordre 2 et inversible, nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ avec } ad - bc \neq 0.$$

Exercice 4.7. (Rattrapage : 2018/2019, **Correction** 38). On veut minimiser la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, où $b \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice réelle d'ordre n , symétrique et définie positive de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Cela revient à résoudre le système $Ax = b$. Pour cela, nous allons employer la méthode du gradient à pas fixe. Soit x^* la solution de ce système. On propose l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k), \end{cases} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

où α est une constante réelle donnée.

1. Soit $e^k = x^k - x^*$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre e^{k+1} et e^k .
2. Montrer que l'algorithme (6.1) converge vers x^* si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_n$.
3. Montrer que la vitesse maximale de convergence est obtenue pour $\alpha = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$ et préciser sa valeur.
4. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Pour quelles valeurs de α l'algorithme (4.15) converge-t-il ?
- (b) Déterminer la suite (x^k) générée par l'algorithme (4.15) en fonction de k , lorsque $x^0 = (0, 1, 0)^T$ et $\alpha = 1/2$.
- (c) Dédurre x^* le point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^3$.
- (d) Calculer le nombre des itérations effectuées tel que $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-6}$.

Travaux pratiques

5.1 TP 1 :Optimisation sans contrainte en dimension un

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'objectif de ce TP est de trouver la valeur x^* qui minimise la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 5.1. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **unimodale** sur $[a, b]$ s'il existe $x^* \in]a, b[$ tel que f est strictement décroissante sur $[a, x^*]$ et strictement croissante sur $[x^*, b]$. Donc, x^* est un point de minimum strict de f .

Méthode de la section dorée

Cette méthode est simple mais efficace, n'utilisant pas de dérivée, pour trouver l'optimum d'une fonction **unimodale** à une dimension.

Algorithme de la section dorée :

Données : fonction f , $[a_0, b_0]$, $eps = 10^{-9}$ et $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (nombre d'or)

$a = a_0; b = b_0;$

$x1 = a + (1 - \tau)(b - a); x2 = a + \tau(b - a);$

$f1 = f(x1); f2 = f(x2);$

$k = 1;$

while $(b - a) > eps$

if $f1 < f2$

$b = x2; x2 = x1;$

$x1 = a + (1 - \tau)(b - a);$

$f2 = f1; f1 = f(x1);$

else

$a = x1; x1 = x2; x2 = a + \tau(b - a);$

$f1 = f2; f2 = f(x2);$

end

$k = k + 1;$

end

$x^* = (a + b)/2;$

1. Créer une fonction Matlab `myfun.m` pour écrire la fonction f .
2. Créer un script `scriptTP1.m` et tracer la figure de la fonction f sur l'intervalle $[a_0, b_0]$. Fonction utile : `plot`. Vérifier que la fonction f est une fonction unimodale sur l'intervalle $[a_0, b_0]$.
3. Créer une fonction Matlab `section_doree.m` qui prend en argument les bornes a et b de l'intervalle. Cette fonction doit retourner la valeur de x^* ainsi que le nombre d'itérations effectuées $iter$,

en prenant comme tolérance $\varepsilon = 10^{-9}$. Tracer sur même figure les points (x_1, f_1) , (x_2, f_2) . Fonction utile : hold on hold off.

4. Tester la fonction `section_doree.m` dans `scriptTP1.m` et afficher à l'aide de la fonction `fprintf` : x^* le point de minimum de la fonction f sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ et *iter* le nombre d'itérations effectuées.

Méthode de Newton en dimension 1

La méthode de Newton est un algorithme de descente unidimensionnel utilisant la direction de descente de Newton :

Algorithme de Newton :

Données : fonction f , x_0 plus proche que la solution, $eps = 10^{-9}$.

$k = 1$;

$x = x_0$;

while $\left| \frac{f'(x)}{f''(x)} \right| > eps$

$x = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$;

$k = k + 1$;

end

Retourner : point de minimum $x^* = x$ et nombre d'itérations $niter = k$.

1. Créer deux fonctions Matlab `fprime.m` et `fseconde.m` pour écrire les fonctions f' et f'' .
2. Créer une fonction Matlab `newton.m` qui prend en argument un point de départ x_0 . En prenant une tolérance $eps = 10^{-9}$. Cette fonction retourne un réel x^* qui annule f' et le nombre d'itérations nécessaires pour trouver x^* .
3. Tester cette fonction dans `scriptTP1.m`. Afficher à l'aide de la fonction `fprintf` la valeur de x^* et le nombre d'itérations effectuées.
4. Comparer le nombre d'itérations avec la méthode de la section dorée.

Exemples

1. Minimiser la fonction $f(x) = 0.5 - xe^{-x^2}$ sur $[0, 2]$ et le point de départ est $x_0 = 0.18$.
2. Minimiser la fonction $f(x) = x^6 - 11x^3 + 17x^2 - 7x + 1$ sur $[0, 1]$ et le point de départ est $x_0 = 0$.
3. Maximiser la fonction $g(x) = x \cos(x)$ sur $[0, \pi]$ et le point de départ est $x_0 = 0.19$.

5.1.1 Programmes sous MATLAB

Méthode de la section dorée avec Matlab

Fonction : myfun.m

```
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Fonctions objectifs f xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
function y= myfun(x)
y=.5-x.*exp(-x.^2) ;%Exemple 1
%y=x.^6-11*x.^3+17*x.^2-7*x+1 ;%Exemple 2
%y=-x.*cos(x) ;% Exemple 3
end
```

Fonction : section_doree.m

```
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Fonction de section dorée xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
function [Min,iter]=section_doree(a,b)
tau=(sqrt(5)-1)/2 ;
eps=0.000000001 ;
x1 = a+(1-tau)*(b-a) ;
x2 = a+tau*(b-a) ;
f1=myfun(x1) ;
f2=myfun(x2) ;
%for i=1 :iter
k=1 ;
while (b-a)> eps
    if f1 < f2 % remplace b par x2
        b=x2 ;
        x2=x1 ;
        x1=a+(1-tau)*(b-a) ;
        f2=f1 ;
        f1=myfun(x1) ;
    else % sinon remplace a par x1
        a=x1 ;
        x1=x2 ;
        x2=a+tau*(b-a) ;
        f1=f2 ;
        f2=myfun(x2) ;
    end
    %-----Dessin les points sur le graphe de f-----
    hold on
    plot(x1,f1,'o') ;
    plot(x2,f2,'*') ;
    hold off
    %-----
    k=k+1 ;
end
```

```

iter=k ;
Min=(a+b)/2 ;
fmin=myfun(Min) ;
%-----Dessin de la solution sur le graphe de f-----
hold on
    plot(Min,fmin,'r') ;
hold off

```

Méthode de Newton avec Matlab

Fonction : fprime.m

```

function y = fprime(x)
%y=(2*x.^2-1).*exp(-x.^2) ;
%y=6*x.^5-33*x.^2+34*x-7 ;
y=-cos(x)+x.*sin(x) ;
end

```

Fonction : fseconde.m

```

function y = fseconde(x)
%y=(6*x-4*x.^3).*exp(-x.^2) ;
%y=30*x.^4-66*x+34 ;
y=2*sin(x)+x.*cos(x) ;
end

```

Fonction : newton.m

```

function [xmin,niter] = newton(alpha)
eps=0.0000000001 ;
k=1 ;
while abs(fprime(alpha)/fseconde(alpha))>eps
    alpha=alpha-fprime(alpha)/fseconde(alpha) ;
    k=k+1 ;
end
niter=k ;
xmin=alpha ;
end

```

Programme principal : scriptTP1.m

```

%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx scriptTP1.m xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
%-----
%-----Graphe de la fonction f-----
%x=0 :.01 :2 ;% Exemple 1
%x=0 :.01 :1 ;% Exemple 2
x=0 :.01 :pi ;% Exemple 3
plot(x,myfun(x),'r')
%-----

```

```

clc
clear ;
%xxxxxxxxxxxxxxxxx affichage de solution xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
fprintf(' ----- \n')
fprintf(' Méthode de la section dorée \n')
fprintf(' ----- \n')
fprintf(' Point de Minimum | Nombre iterations \n')
fprintf(' -----\n')
a=0 ;
b=1 ;
[Min,iter]=section_doree(a,b) ;
%-----
fprintf('%4.4f          |    %4.0f\n',Min,iter)
fprintf(' xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx\n')
%===== Méthode Newton =====
fprintf('      Méthode de Newton                      \n')
fprintf(' ----- \n')
fprintf(' Point de Minimum | Nombre iterations \n')
fprintf(' ----- \n')
%alpha=0.18 ;
%alpha=0 ;
alpha=0.19 ;
[xmin,niter] = newton(alpha) ;
%-----
fprintf('%4.4f          |    %4.0f\n',xmin,niter)
fprintf(' -----\n')

```

Résultats

1. Pour $f(x) = 0.5 - xe^{-x^2}$, $[a, b] = [0, 2]$ et $x_0 = 0.18$.

```

-----
Méthode de la section dorée
-----
Point de Minimum | Nombre iterations
-----
0.7071          |    45
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Méthode de Newton
-----
Point de Minimum | Nombre iterations
-----
0.7071          |    7
-----

```

2. Pour $f(x) = x^6 - 11x^3 + 17x^2 - 7x + 1$, $[a, b] = [0, 1]$ et $x_0 = 0$.

```

-----
Méthode de la section dorée
-----
Point de Minimum | Nombre iterations
-----

```

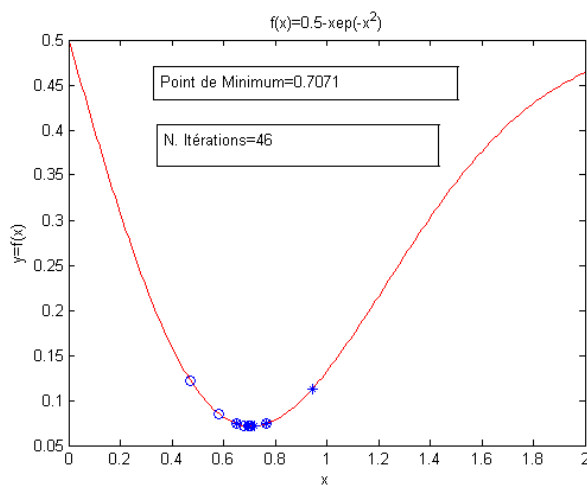


FIGURE 5.1 – Exemple 1

```

0.2836          |          45
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Méthode de Newton
-----
Point de Minimum | Nombre iterations
-----
0.2836          |          5
-----

```

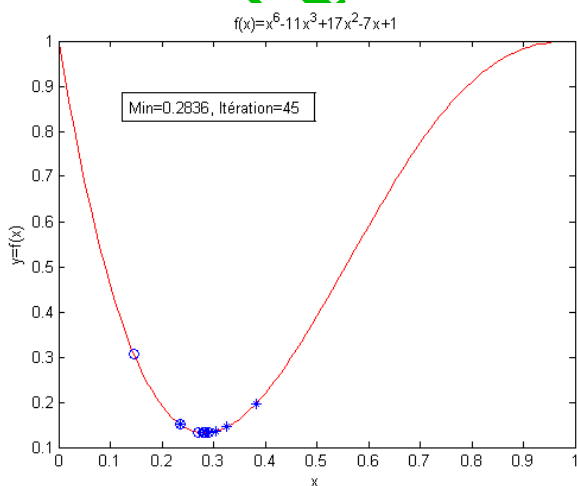


FIGURE 5.2 – Exemple 2

3. Pour maximiser la fonction $g(x) = x \cos(x)$ sur $[0, \pi]$, on pose $f(x) = -g(x)$ et $x_0 = 0.19$.

```

-----
Méthode de la section dorée
-----

```

```

Point de Minimum | Nombre iterations
-----

```

```

0.8603          |          47

```

```

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Méthode de Newton
-----
Point de Minimum | Nombre iterations
-----
0.8603           |          7
-----

```

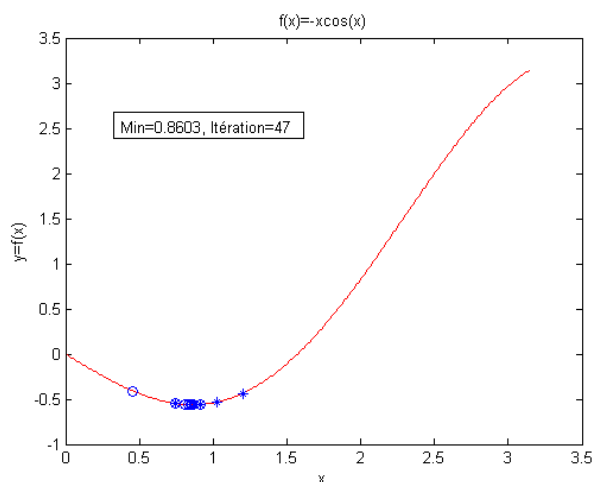


FIGURE 5.3 - Exemple 3

5.2 TP 2 : Méthodes de gradient

L'objectif de ce TP est de vous faire programmer les méthodes suivantes :

- ☞ Gradient à pas fixe,
- ☞ Gradient à pas optimal,

pour des fonctions quadratiques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le vecteur $b_n \in \mathbb{R}^n$ définis par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } b_n = (1, 1, \dots, 1)^T$$

On cherche à minimiser dans $\mathbb{R}^n$ la fonction :

$$J_n(x) = \frac{1}{2} \langle A_n x, x \rangle - \langle b_n, x \rangle.$$

On appelle donc $(\mathcal{P}_n)$ le problème de minimisation sans contraintes suivant :

$$(\mathcal{P}_n) : \begin{cases} \min J_n(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Remarque : il est important d'exploiter, dans les questions qui suivent, le format « creux » de la matrice A_n afin de diminuer les temps de calcul. **Fonctions Matlab utiles :** `sparse`, `full`.

Méthode du gradient à pas fixe

On rappelle l'algorithme du gradient à pas fixe pour une fonctionnelle $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un point de départ x^0 , un pas ρ et un test d'arrêt ϵ préalablement définis :

Algorithme du gradient à pas fixe :

Initialiser le résidu r^0 à 1 et le compteur k à 1.

Tant que le résidu est plus grand que ϵ et que le compteur n'est pas trop grand :

- calculer la descente $d^k = -\nabla f(x_k)$,
- poser $x^{k+1} = x^k + \rho d^k$,
- calculer le résidu $r^{k+1} = \|x^{k+1} - x^k\|$,
- incrémenter le compteur.

Créer un script **scriptTP2_fixe.m** pour répondre aux questions suivantes :

1. On se place dans le cas $n = 2$.

- (a) Calculer J_2 et ∇J_2 . Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de J_2 ainsi que le champ de vecteurs ∇J_2 sur le pavé $[-10, 10]^2$.

Fonctions Matlab utiles : `contour`, `quiver`.

- (b) Calculer les itérations $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ données par l'algorithme de gradient à pas fixe, et tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les x^k . On prendra $x^0 = (8, 4)$, $\rho = 0.1$ et $\epsilon = 10^{-12}$.

Fonctions Matlab utiles : `hold on, plot, hold off`

2. On se place de nouveau dans le cas général.

- (a) écrire une fonction **gradient_fixe.m** qui prend en argument A_n, b_n , un point de départ x^0 , un pas ρ et un test d'arrêt ϵ , et qui renvoie le vecteur x_n qui minimise J_n ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
- (b) Tester cette fonction pour $\rho = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-12}$ et pour $n = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque n .

3. Reprendre la question 2.b. pour $\rho = 0.5$, puis $\rho = 1$. Que constate-t-on ? Peut-on choisir le pas ρ arbitrairement ?

Méthode du gradient à pas optimal

On rappelle l'algorithme du gradient à pas optimal pour une fonctionnelle $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un point de départ x^0 et un test d'arrêt ϵ préalablement définis :

Méthode du gradient à pas optimal :

Initialiser le résidu r^0 à 1 et le compteur k à 1.

Tant que le résidu est plus grand que ϵ et que le compteur n'est pas trop grand :

- calculer la descente $d^k = -\nabla f(x^k)$,
- calculer $\rho^k \geq 0$ qui minimise $\rho \mapsto f(x^k + \rho d^k)$,
- poser $x^{k+1} = x^k + \rho^k d^k$,
- calculer le résidu $r^{k+1} = \|x^{k+1} - x^k\|$,
- incrémenter le compteur.

Créer un script **scriptTP2_optimal.m** et reprendre les questions suivantes :

1. On se place dans le cas $n = 2$.

- (a) Calculer J_2 et ∇J_2 . Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de J_2 ainsi que le champ de vecteurs ∇J_2 sur le pavé $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

Fonctions Matlab utiles : `contour, quiver`.

- (b) Calculer les itérations $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ données par l'algorithme de gradient à pas optimal, et tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les x^k . On prendra $x^0 = (8, 4)$, $\rho = 0.1$ et $\epsilon = 10^{-12}$.

Fonctions Matlab utiles : `hold on, plot, hold off`.

2. On se place de nouveau dans le cas général.

- (a) Écrire une fonction **gradient_optimal.m** qui prend en argument A_n, b_n , un point de départ x^0 , un pas ρ et un test d'arrêt ϵ , et qui renvoie le vecteur x_n qui minimise J_n ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
- (b) Tester cette fonction pour $\rho = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-12}$ et pour $n = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque n .

5.2.1 Programmes sous MATLAB

Fichier : **scriptTP2_fixe.m**

%-----


```

%-----Fichier scriptTP1_fixe.m-----
%-----
clear all
close all
%-----
%-----Cas n=2-----
%-----
%-----Maillage du domaine-----
[x,y] = meshgrid(-10 :.5 :10,-10 :.5 :10) ;
z= 2*x.^2-2*x*y+2*y.^2-x-y ;
%-----
%-----Surface de J2-----
%-----
figure(1) ; mesh(x,y,z) ; title('mesh')
%figure(2) ; surf(x,y,z) ; title('surf')
%-----
%-----Courbe de niveaux et Champ de vecteur-----
%-----
%figure(3) ; contour(x,y,z,20) ; title('contour')
%figure(4) ; contourf(x,y,z,20) ; title('contourf')
%-----
[c,h]=contour(x,y,z,20) ;
%clabel(c,h) ;
[u,v]=gradient(z,-0.2,-0.15) ;
hold on
quiver(x,y,u,v)
hold off
axis image
%-----
%-----Gradient à pas fixe pour n=2-----
%-----
xsol=0.50 ;
ysol=0.50 ;
rho=0.1 ;
k=1 ;
x(k)=8 ;
y(k)=4 ;
hold on
plot(x(k),y(k),'+r') ;
hold off
%-----
r(k)=1 ;
while r(k)> 10^-6 && k< 1000
    dx(k)=4*x(k)-2*y(k)-1 ;
    dy(k)=4*y(k)-2*x(k)-1 ;
    x(k+1)=x(k)-rho*dx(k) ;
    y(k+1)=y(k)-rho*dy(k) ;
    hold on
    plot(x(k+1),y(k+1),'*') ;
    hold off

```

```

r(k+1)=sqrt((x(k+1)-x(k)).^2+(y(k+1)-y(k)).^2);
k=k+1;
end
%-----solution exacte-----
hold on
plot(xsol,ysol,'+r');
hold off
%pause;
%-----Cas général-----
%-----
clc
clear;
%rho=input('Donner la valeur de rho=');
%N=input('Donner la taille de la matrice N=');
fprintf('\n Taille | Itérations | Temps | Erreur \n')
fprintf('-----\n')
for (N=2 :5)
    %-----Fonction gradient_fixe-----
    [niter,temps,err]=gradient_fixe(N);
    %-----
    fprintf('le temps de calcul est %4.6f secondes \n',toc);
    fprintf('le nombre d'iterations est %4.0f iteration \n',niter);

    fprintf('\n %4.0f | %4.0f | %4.6f | %4.6f \n', N, niter, temps, err)
end
fprintf('-----\n')

```

Fichier fonction Gradient_fixe.m

```

%Ce fichier est une fonction matlab
% gradient_fixe calcul x_n qui minimise J_n ainsi que le nombre d'itérations
% effectuées
function [niter,temps,err]=gradient_fixe(N)
% -----Déclaration la matrice A-----
A=sparse(N,N);
for k=1 :N
    A(k,k)=4;
end
for k=2 :N
    A(k-1,k)=-2;
end
for k=2 :N
    A(k,k-1)=-2;
end
%full(A)
%----- le vecteur bn-----
b=ones(N,1);
%full(b)
%----- point de départ x0-----

```

```

x0=ones(N,1) ;
%----- calcul point de minimum xn-----
k=1 ;
tic ;
rho=0.1 ;
x=x0 ;
r(k)=1 ;
while r(k)>10^-6 && k<=999
    grad=A*x-b ;
    x=x-rho*grad ;
    r(k+1)=rho*norm(grad) ;
    err=r(k+1) ;
    % hold on
    %plot(k,r(k+1),'*')
    %hold off
    k=k+1 ;
end
niter=k ;
temps=toc ;
return

```

Fichier : scriptTP2_optimal.m

```

clear all
close all
%-----
%-----Cas n=2-----
%-----
[x,y] = meshgrid(-10 :.5 :10,-10 :.5 :10) ;
z= 2*x.^2-2*x*y+2*y.^2-x-y ;
%----- Surface de J2-----
%plot3(x,y,z) ; % affichage de la courbe
%figure(1) ; mesh(x,y,z) ; title('mesh')
%figure(2) ; surf(x,y,z) ; title('surf')
%----- Courbe de niveaux et Champ de vecteur-----
%figure(3) ; contour(x,y,z,20) ; title('contour')
%figure(4) ; contourf(x,y,z,20) ; title('contourf')
%-----
[u,v]=gradient(z,-0.2,-0.15) ;
[c,h]=contour(x,y,z,20) ;
%clabel(c,h) ;
hold on
quiver(x,y,u,v)
hold off
axis image
%-----Gradient à pas fixe avec n=2-----
xsol=0.50 ;
ysol=0.50 ;
k=1 ;
x(k)=8 ;

```

```

y(k)=4 ;
hold on
plot(x(k),y(k),'+r') ;
hold off
r(k)=1 ;
while r(k)> 10^-6 && k<1000
    dx(k)=4*x(k)-2*y(k)-1 ;
    dy(k)=4*y(k)-2*x(k)-1 ;
    rho(k)=(dx(k).^2+dy(k).^2)/(4*dx(k).^2+4*dy(k).^2-4*dx(k)*dy(k)) ;
    x(k+1)=x(k)-rho(k)*dx(k) ;
    y(k+1)=y(k)-rho(k)*dy(k) ;
    hold on
    plot(x(k+1),y(k+1),'*') ;
    hold off
    r(k+1)=sqrt((x(k+1)-x(k)).^2+(y(k+1)-y(k)).^2) ;
    k=k+1 ;
end
%-----solution exacte-----
hold on
plot(xsol,ysol,'+r') ;
hold off
%-----Cas général-----
clc
clear ;
fprintf('\n Taille | Itérations | Temps | Erreur \n')
fprintf('-----\n')
for (N=2 :100)
    %-----Fonction gradient_fixe-----
    [niter,temps,err]=gradient_optimal(N) ;
    %-----
    fprintf('le temps de calcul est %4.6f secondes \n',toc) ;
    fprintf('le nombre d'iterations est %4.0f iteration \n',niter) ;

    fprintf('\n %4.0f | %4.0f | %4.6f | %4.6f \n', N, niter, temps, err)
end
fprintf('-----\n')

```

Fichier : gradient_optimal.m

```

%Ce fichier est une fonction matlab
% gradient_fixe calcul xn qui minimise Jn ainsi que le nombre d'itérations
% effectuées
function [niter,temps,err]=gradient_optimal(N)
% -----Déclaration la matrice A-----
A=sparse(N,N) ;
for k=1 :N
    A(k,k)=4 ;
end

```

```

for k=2 :N
    A(k-1,k)=-2 ;
end
for k=2 :N
    A(k,k-1)=-2 ;
end
%full(A)
%----- le vecteur bn-----
b=ones(N,1) ;
%full(b)
%----- point de départ x0-----
x0=ones(N,1) ;
%----- calcul point de minimum xn-----
k=1 ;
tic ;
x=x0 ;
r(k)=1 ;
while r(k)>10^-6 && k<10000
    grad=A*x-b ;
    %full(grad) ;
    rho=(norm(grad))^2./(grad'*A*grad) ;
    %full(mu)
    x=x-rho*grad ;
    %full(x)
    r(k+1)=rho*norm(grad) ;
    err=r(k+1) ;
    k=k+1 ;
end
niter=k ;
temps=toc ;
return

```

5.3 TP3 : Méthode du gradient conjugué et méthode de Newton

L'objectif de ce TP est de vous faire programmer les méthodes suivantes :

- ☞ Méthode du gradient conjugué,
- ☞ Méthode de Newton,

pour résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (5.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable.

5.3.1 Méthode du gradient conjugué

On considère que f est une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

L'idée de cette méthode est de construire itérativement des directions $d_0, d_1, \dots, d_k$ mutuellement conjuguées. A chaque étape k la direction d_k est obtenue comme combinaison linéaire du gradient en x_k et de la direction précédente d_{k-1} , les coefficients étant choisis de telle manière que d_k soit conjuguée avec toutes les directions précédentes.

Si l'on note $g_k = \nabla f(x_k) = Ax_k - b$, l'algorithme de la méthode du gradient conjugué prend la forme suivante :

Algorithme 5.1 (Algorithme du gradient conjugué)

- 1 : On choisit un point de départ x_0 et un test d'arrêt ε ,
- 2 : Pour $k = 0$, poser $g_k = Ax_k - b$, $r_k = \|g_k\|$ et $d_k = -g_k = b - Ax_k$,
- 3 : Tant que $r_k \geq \varepsilon$ et $k \leq 100$ faire :
- 4 : Calculer $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ avec $\alpha_k = \frac{\|g_k\|^2}{d_k^T A d_k}$,
- 5 : Calculer $g_{k+1} = Ax_{k+1} - b$, $\beta_k = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}$ et $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$
- 6 : Poser $k := k + 1$ et aller à l'étape 2.

1. Créer un script **scriptTP3_conjugué.m** et vérifier numériquement, pour quelques valeurs de n , que A est bien définie positive. On pourra utiliser par exemple la fonction **eig**.
2. On se place dans le cas $n = 2$:
 - (a) calculer $f(x_1, x_2)$ et $\nabla f(x_1, x_2)$. Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de f ainsi que le champ de vecteurs ∇f sur le pavé $[-10, 10] \times [-10, 10]$. On utilisera les fonctions de Matlab **contour** et **quiver**.
 - (b) Calculer les itérations $x_k = (x_1^k, x_2^k)$ données par l'algorithme du gradient conjugué, et tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les x_k . On prendra $x_0 = (8, 4)$ et $\epsilon = 10^{-9}$.
3. On se place de nouveau dans le cas général.
 - (a) Écrire une fonction **gradient_conjugué.m** qui prend en argument A, b , un point de départ x_0 et un test d'arrêt ϵ , et qui renvoie le vecteur x^* qui minimise f ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
 - (b) Tester cette fonction pour $\epsilon = 10^{-9}$ et $n = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque n .

5.3.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet de construire un algorithme permettant de résoudre le système d'équations non-linéaires :

$$\nabla f(x) = 0,$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. L'algorithme de cette méthode au problème d'optimisation (5.1) est donné par :

Algorithme 5.2 (Algorithme de Newton)

- 1 : On choisit un point de départ x_0 et un test d'arrêt ε ,
 - 2 : Pour $k = 0$, poser $err = \|\nabla f(x_k)\|$,
 - 3 : Tant que $err \geq \varepsilon$ et $k \leq 100$ faire
 - 4 : Calculer $x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$,
 - 5 : Poser $k := k + 1$ et aller à l'étape 2.
-

1. Écrire une fonction **newton.m** qui prend en argument A, b , un point de départ x_0 et un test d'arrêt ε , et qui renvoie le vecteur x^* qui minimise f ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
2. Créer un script **scriptTP3_newton.m** et tester la fonction **newton.m** pour $\varepsilon = 10^{-9}$ et $n = 2, 5, 20, 50$. Afficher à l'aide de la fonction **fprintf** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque n .

Dr. NOUIR Brahim

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 1.1 : (Exercice 1.1).

1. (a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, la fonction $f(x, y) = \frac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 (b) Si $(x, y) = (0, 0)$, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2} |\cos \theta| \sin \theta = 0, \forall \theta$$

Alors, f est continue en $(0, 0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, la fonction f est dérivable par rapport à y . Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{|x|^{3/2}(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si $(x, y) = (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)}{k} = 0.$$

Alors, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{3/2}(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (b) Si $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable par rapport à x et la dérivée donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{yx^{1/2}(3y^2 - x^2)}{2(x^2 + y^2)^2}$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable par rapport à x et son dérivée donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(-x)^{1/2}(7x^2 + 3y^2)}{2(x^2 + y^2)^2}$$

- (c) Si $(x, y) = (0, 0)$, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Alors, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^{1/2}(3y^2 - x^2)}{2(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*, \\ \frac{y(-x)^{1/2}(7x^2 + 3y^2)}{2(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1/n, 0) &= \frac{1/n^{3/2}}{1/n^2} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1/n, 1/n) &= \frac{\sqrt{n}}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.\end{aligned}$$

Alors, les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|at|^{3/2} bt}{t(a^2 t^2 + b^2 t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|a|^{3/2} b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{|t|^{3/2}}{t^2} = 0.$$

4. Nous avons :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h|^{3/2} k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

On pose $\varphi(h, y) = \frac{|h|^{3/2} k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$. Nous avons :

$$\varphi(1/n, 1/n) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Alors, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 1.2 : (Exercice 1.2).

1. Nous avons :

(a) La fonction g est une fonction rationnelle est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les dérivées partielles premières sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0)}{h} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(0, k) - g(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(0, k)}{k} = 0.\end{aligned}$$

Alors, les dérivées partielles premières existent et sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \begin{cases} \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}\end{aligned}$$

- (b) Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'autre part, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \sin \theta (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos \theta (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) = 0.$$

Donc, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.

Alors, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Nous avons :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^5}{h^4} \right) = 1.$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{-k^5}{k^4} \right) = -1.$$

3. D'après la question 2., $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et avec le théorème de Schwarz, la fonction g n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 1.3 : (Exercice 1.3).

1. Nous avons :

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$.

- (b) La fonction f est différentiable sur D_f et ses dérivées partielles premières sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + (x + y^2)^2}.$$

Alors, on a :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{1 + (x + y^2)^2}, \frac{2y}{1 + (x + y^2)^2} \right)^T.$$

- (c) Les deux fonctions partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables sur D_f telles que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2(x + y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2 + 2(x + y^2)(x - 3y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} \text{ et} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-y(x + y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} \end{aligned}$$

Alors, la matrice hessienne de f est donnée par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-2(x + y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} & \frac{-y(x + y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} \\ \frac{-y(x + y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} & \frac{2 + 2(x + y^2)(x - 3y^2)}{[1 + (x + y^2)^2]^2} \end{pmatrix}$$

(d) Développement limité de f au point $(0, 0)$ à l'ordre 2 donné par :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a) h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

On pose $a = (0, 0)$ et $h = (x, y)$. Nous avons : $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(0, 0) = (1, 0)^T$ et

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors, on a :

$$f(x, y) = x + y^2 + o(x^2 + y^2).$$

2. Nous avons :

(a) $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 + xy > 0\}$.

(b) On remarque que $g \in \mathcal{C}^1(D_g)$. Donc, on a :

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{1+xy} \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$$

(c) $g \in \mathcal{C}^2(D_g)$. Alors, on a :

$$\nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & \frac{-x^2}{(1+xy)^2} \end{pmatrix}$$

(d) Développement limité de g au point $(0, 0)$ à l'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(0, 0) + \left\langle \nabla g(0, 0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nabla^2 g(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + o(x^2 + y^2) \\ &= xy + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.1 : (Exercice 2.1). Soient $(x, y), (x', y') \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} (x, y) \in E &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \\ (x', y') \in E &\Rightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = [(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y']$$

D'après la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, nous avons :

$$[(1 - \lambda)x + \lambda x']^2 \leq (1 - \lambda)x^2 + \lambda(x')^2 \text{ et } [(1 - \lambda)y + \lambda y']^2 \leq (1 - \lambda)y^2 + \lambda(y')^2,$$

donc,

$$\frac{[(1 - \lambda)x + \lambda x']^2}{a^2} + \frac{[(1 - \lambda)y + \lambda y']^2}{b^2} \leq (1 - \lambda) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \lambda \left(\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \right) \leq 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

Alors, $(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') \in E$ d'où E est convexe.

Correction de l'exercice 2.2 : (Exercice 2.2). Nous avons :

$$z = x + \frac{1}{\alpha}(x - y) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1 + \alpha} + \frac{\alpha z}{1 + \alpha}.$$

D'après la convexité de f , nous avons :

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1 + \alpha} + \frac{\alpha z}{1 + \alpha}\right) \leq \frac{1}{1 + \alpha}f(y) + \frac{\alpha}{1 + \alpha}f(z).$$

En multipliant l'inégalité précédente par $1 + \alpha$, on obtient :

$$f(y) \geq f(x) + \alpha(f(x) - f(z)).$$

Correction de l'exercice 2.3 : (Exercice 2.3). Nous avons :

$$x_2 \in]x_1, x_3[\Leftrightarrow \exists \lambda \in]0, 1[: x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Donc, on a :

$$(1 - \lambda)(x_2 - x_1) = \lambda(x_3 - x_2) \Rightarrow \frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{\|x_3 - x_2\|}{\|x_2 - x_1\|}. \quad (6.1)$$

D'après la convexité de f , nous avons :

$$f(x_2) = f[(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3] \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Donc, on a :

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \lambda[f(x_3) - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1)],$$

Ainsi,

$$f(x_3) - f(x_2) \geq \frac{1 - \lambda}{\lambda}[f(x_2) - f(x_1)] \quad (6.2)$$

en remplaçant (6.1) dans (6.2), on obtient :

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{\|x_3 - x_2\|} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\|x_2 - x_1\|}$$

Correction de l'exercice 2.4 : (Exercice 2.4).

1. Nous avons :

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} \geq 0.$$

D'où f est convexe sur $[0, +\infty[$

2. En utilisant l'inégalité de Jensen pour $\lambda_i = 1/n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$. Nous avons :

$$f\left(\sum_{i=1}^n b_i/n\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(b_i).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1 + e^{\sum_{i=1}^n b_i/n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + e^{b_i}}$$

On pose $b_i = \ln(a_i)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}}$$

Correction de l'exercice 2.5 : (Exercice 2.5).

1. Les dérivées partielles premières de f sont données par :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{f(x)}{nx_i}.$$

Donc, les dérivées secondes sont données par :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} -\frac{(n-1)f(x)}{n^2 x_i^2} & \text{si } i = j, \\ \frac{f(x)}{n^2 x_i x_j} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $w_i = 1/x_i$. Donc, on peut écrire la matrice hessienne comme

$$\nabla^2 f(x) = -\frac{f(x)}{n^2} (n \text{diag}(1/x_1^2, 1/x_2^2, \dots, 1/x_n^2) - ww^T)$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Nous avons :

$$v^T \nabla^2 f(x) v = -\frac{f(x)}{n^2} \left[n \sum_{i=1}^n v_i^2 / x_i^2 - (v^T w)^2 \right]$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$(v^T w)^2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i / x_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 / x_i^2 \right) = n \sum_{i=1}^n v_i^2 / x_i^2.$$

donc, on a :

$$n \sum_{i=1}^n v_i^2 / x_i^2 - (v^T w)^2 \geq 0,$$

et par conséquent $v^T \nabla^2 f(x) v \leq 0$, d'où f est concave sur D .

2. On pose $x_1 = x_2 = \dots = x_n = y$. Nous avons :

$$f(x) = y.$$

Donc, la fonction f est linéaire et par conséquent f n'est pas strictement concave.

Correction de l'exercice 2.6 : (Exercice 2.6).

1. Nous avons :

(a) La fonction ϕ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car

$$\forall x > 0, \phi''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0.$$

(b) Donc, on a :

$$\ln \left[\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right] \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \ln \left[(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \right].$$

D'après de la croissance de la fonction $x \mapsto e^x$, on obtient :

$$(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$ c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x^*) \leq F(x).$$

On suppose que $\nabla F(x^*) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x^* + th) - F(x^*)}{t} = \langle \nabla F(x^*), h \rangle \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(x^* + th) - F(x^*)}{t} = \langle \nabla F(x^*), h \rangle \leq 0.$$

Grâce la différentiabilité de F , on a :

$$\langle \nabla F(x^*), h \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

On pose $h = \nabla F(x^*)$, on obtient :

$$\|\nabla F(x^*)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla F(x^*) = 0, \text{ donc contradiction.}$$

Réciproquement : On suppose que $\nabla F(x^*) = 0$. D'après la différentiabilité et la convexité de F , nous avons :

$$F(x) \geq F(x^*) + \langle \nabla F(x^*), x - x^* \rangle = F(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donc x^* est un point de minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 2.7 : (Exercice 2.7).

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Donc, on a :

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + y - \frac{1}{y} \\ 2y + x - \frac{1}{x} \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$$

Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\rangle = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) h^2 + 2hk + \left(2 + \frac{1}{y^2}\right) k^2 \geq 0$$

car

$$\Delta' = -\frac{k^2}{x^2 y^2} (3x^2 y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 1) \leq 0.$$

Donc, g est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. On remarque que $g(x, y) = \ln(f(x, y))$. Soient $\forall (x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, d'après la convexité de g , nous avons :

$$\begin{aligned} \ln(f((1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y'))) &\leq (1-\lambda) \ln(f(x, y)) + \lambda \ln(f(x', y')) \\ &\leq \ln[(1-\lambda)f(x, y) + \lambda f(x', y')] \\ &\text{(d'après la concavité de } t \mapsto \ln(t) \text{)}. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$f[(1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y')] \leq (1-\lambda)f(x, y) + \lambda f(x', y').$$

D'où, f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Correction de l'exercice 2.8 : (Exercice 2.8).

1. Soient $x, y \in E_r$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{cases} x \in E_r \Rightarrow \Phi(x) \geq r, \\ y \in E_r \Rightarrow \Phi(y) \geq r. \end{cases} \Rightarrow \Phi[(1-\lambda)x + \lambda y] \geq (1-\lambda)\Phi(x) + \lambda\Phi(y) \geq (1-\lambda)r + \lambda r = r.$$

Alors, $(1-\lambda)x + \lambda y \in E_r$ d'où E_r est convexe.

2. Soit $x \in]0, 1[$.

(a) Nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Donc, pour tout $x \in]0, 1[$ $\varphi''(x) \geq 0$ d'où φ est convexe sur $]0, 1[$.

(b) Avec l'inégalité de Jensen, nous avons :

$$\varphi\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)}{3} \Leftrightarrow 3\varphi\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)$$

donc, $a+b+c=1$ et $\varphi(1/3) = 1/2$, on a :

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Correction de l'exercice 2.9 : (Exercice 2.9).

1. Soient $x \in [0, 2[$ et $\lambda \in [0, 1[$. Nous avons :

$$\Phi[(1-\lambda)x + \lambda \times 2] - (1-\lambda)\Phi(x) - \lambda\Phi(2) = -\lambda \leq 0.$$

Donc, Φ est convexe sur $[0, 2]$.

2. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \frac{-(1 + \ln(x))}{x^2 \ln^2(x)}.$$

(a) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\varphi''(x) \leq 0$, donc φ est concave sur $]1, +\infty[$.

(b) En utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\varphi\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c)}{3},$$

c'est à dire

$$\ln \ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \geq \frac{\ln \ln(a) + \ln \ln(b) + \ln \ln(c)}{3} = \frac{\ln [\ln(a) \ln(b) \ln(c)]}{3},$$

D'après la croissance de la fonction exponentielle, nous avons :

$$\ln \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \geq \sqrt[3]{\ln(a) \ln(b) \ln(c)}.$$

Correction de l'exercice 2.10 : (Exercice 2.10).

1. On suppose que h est convexe. Soient $(x, t), (x', t') \in Epi(h)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(x, t) \in Epi(h) &\Rightarrow h(x) \leq t, \\ (x', t') \in Epi(h) &\Rightarrow h(x') \leq t'.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$h[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(x') \leq (1-\lambda)t + \lambda t'.$$

D'où

$$(1-\lambda)(x, t) + \lambda(x', t') = [(1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)t + \lambda t'] \in Epi(h)$$

donc $Epi(h)$ est convexe.

On suppose que $Epi(h)$ est convexe. Soient $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(x, h(x)) \in Epi(h) \quad \text{et} \quad (x', h(x')) \in Epi(h).$$

Mais $Epi(h)$ est convexe. Donc, on a :

$$(1-\lambda)(x, h(x)) + \lambda(x', h(x')) = [(1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)h(x) + \lambda h(x')] \in Epi(h).$$

D'où

$$h[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(x').$$

Alors, h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

2. On pose $h(x) = \ln(1 + e^x)$. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \Rightarrow h \text{ est strictement convexe} \Rightarrow Epi(h) = E \text{ est convexe.}$$

3. En utilisant l'inégalité de Jensen sur la fonction convexe $h(x) = \ln(1 + e^x)$. On pose $\lambda_k = 1/n$ et $y_k = \ln(x_k)$. Nous avons :

$$\ln \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \right) = \ln \left(1 + \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right) \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + e^{y_k}) = \ln \left[\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n} \right]$$

d'où, on a :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

Correction de l'exercice 2.11 : (Exercice 2.11).

1. On suppose que h est convexe. Soient $(x, t), (x', t') \in Epi(h)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(x, t) \in Epi(h) &\Rightarrow h(x) \leq t, \\ (x', t') \in Epi(h) &\Rightarrow h(x') \leq t'.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$h[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(x') \leq (1-\lambda)t + \lambda t'.$$

D'où

$$(1 - \lambda)(x, t) + \lambda(x', t') = [(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)t + \lambda t'] \in Epi(h)$$

donc $Epi(h)$ est convexe.

On suppose que $Epi(h)$ est convexe. Soient $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(x, h(x)) \in Epi(h) \text{ et } (x', h(x')) \in Epi(h).$$

Mais $Epi(h)$ est convexe. Donc, on a :

$$(1 - \lambda)(x, h(x)) + \lambda(x', h(x')) = [(1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)h(x) + \lambda h(x')] \in Epi(h).$$

D'où

$$h[(1 - \lambda)x + \lambda x'] \leq (1 - \lambda)h(x) + \lambda h(x').$$

Alors, h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

2. On pose $h(x) = \ln(1 + e^x)$. Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \Rightarrow h \text{ est strictement convexe} \Rightarrow Epi(h) = E \text{ est convexe.}$$

3. En utilisant l'inégalité de Jensen sur la fonction convexe $h(x) = \ln(1 + e^x)$. On pose $\lambda_k = 1/n$ et $y_k = \ln(x_k)$. Nous avons :

$$\ln \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \right) = \ln \left(1 + \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right) \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + e^{y_k}) = \ln \left[\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n} \right]$$

d'où, on a :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

Correction de l'exercice 2.12 : (Exercice 2.12).

1. Nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \text{ et } \varphi''(x) = \frac{-(1 + \ln(x))}{x^2 \ln^2(x)} < 0.$$

D'où, φ est concave sur $]1, +\infty[$.

2. Nous avons :

$$\ln \left[\ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \right] = \varphi \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) = \ln \left(\sqrt{\ln(x) \ln(y)} \right).$$

D'après la croissance de la fonction $\ln$, nous avons :

$$\ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}.$$

Correction de l'exercice 2.13 : (Exercice 2.13).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Alors, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement convexe sur } \mathbb{R}.$$

2. Nous avons :

$$\nabla^2 F_a(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + f''(x-y) & 2 - f''(x-y) \\ 2 - f''(x-y) & 2 + f''(x-y) \end{bmatrix}$$

Nous avons $\text{tr}(\nabla^2 F_a(x, y)) = 4 + 2f''(x-y) > 0$ et

$$\det[\nabla^2 F_a(x, y)] = (a+2)(2-a+2f''(x-y)) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2[1+f''(x-y)],$$

autrement dit

$$-2 \leq a \leq 2 + 2 \inf f'' = 2.$$

Correction de l'exercice 2.14 : (Exercice 2.14).

1. Faire chemin graphique.
2. (a) Montrons Ω^c définie par :

$$\Omega^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0; y \leq 0; xy \leq 1\}.$$

est fermé. Nous avons : $(x_n, y_n) \in \Omega^c$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y).$$

On a :

$$(x_n, y_n) \in \Omega^c \Leftrightarrow x_n \leq 0, y_n \geq 0, x_n y_n \geq 1.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $(x, y) \in \Omega^c$ donc Ω^c est fermé. Alors, Ω est un ouvert.

- (b) Montrons Ω est convexe : Soient $(x, y), (x', y') \in \Omega$ et $\alpha \in [0, 1]$. Nous avons :

$$(1-\alpha)(x, y) + \alpha(x', y') = [(1-\alpha)x + \alpha x', (1-\alpha)y + \alpha y']$$

On a :

$$(1-\alpha)x + \alpha x' > 0, (1-\alpha)y + \alpha y' > 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= [(1-\alpha)x + \alpha x'] [(1-\alpha)y + \alpha y'] \\ &= (1-\alpha)^2 xy + \alpha^2 x' y' + \alpha(1-\alpha)[xy' + x'y] \\ &> (1-\alpha)^2 + \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)[xy' + x'y]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Omega &\Rightarrow x > 0; y > 0; xy > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{x} \Rightarrow xy' > \frac{x'}{x}, \\ (x', y') \in \Omega &\Rightarrow x' > 0; y' > 0; x'y' > 1 \Rightarrow y' > \frac{1}{x'} \Rightarrow xy' > \frac{x}{x'}. \end{aligned}$$

Donc,

$$x'y + xy' > \frac{x^2 + (x')^2}{xx'} > 2.$$

Alors, on a :

$$\varphi(\alpha) > (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha)[xy' + x'y] > (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 + 2\alpha(1 - \alpha) = 1$$

3. Montrons que f est strictement convexe sur Ω : nous avons

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 12y, 4y^3 - 12x)^T \text{ et } \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -12 \\ -12 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(x, y) \in \Omega$, nous avons :

$$\text{tr}(\nabla^2 f(x, y)) = 12(x^2 + y^2) > 0$$

et

$$\det(\nabla^2 f(x, y)) = 144(x^2 y^2 - 1) = 144(xy - 1)(xy + 1) > 0.$$

D'où f est strictement convexe sur Ω .

4. La fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, il suffit de prendre $(x, y) = (0, 0)$, on obtient :

$$\text{tr}(\nabla^2 f(0, 0)) = 0 \text{ et } \det(\nabla^2 f(0, 0)) = -144 < 0.$$

Correction de l'exercice 2.15 : (Exercice 2.15).

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + ay + 2z \\ 4y + ax + 2z \\ 2z + 2y + 2x \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6 & a & 2 \\ a & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode des mineurs principaux, on obtient :

$$\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 24 - a^2 > 0 \text{ et } \Delta_3 = \det(\nabla^2 f(x, y, z)) = -2a^2 + 8a + 8 \geq 0.$$

Donc, $a \in [-2 + 2\sqrt{5}, 2\sqrt{6}[$.

Correction de l'exercice 3.1 : (Exercice 3.1).

1. Nous avons :

$$[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]^2 = \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 1$$

Alors, on a :

$$\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = 1 - 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta).$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= r^4 \left[\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - \frac{4}{r^2} \cos(\theta) \sin(\theta) \right] \\ &= r^4 \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) - \frac{2}{r^2} \sin(2\theta) \right]. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = +\infty$$

car $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) > 0$. Alors, f est coercive.

3. On remarque que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et d'après la coercivité de f , alors f admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et atteint ce minimum.

D'autre part, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, on calcule les points critiques de f :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

Nous avons :

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

donc $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$. Les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Nous avons :

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$$

La fonction est atteint son minimum global aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

4. on suppose qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et coercive admette un maximum global c'est à dire qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \leq f(x^*).$$

Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Alors, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty \leq f(x^*).$$

donc, contradiction.

Correction de l'exercice 3.2 : (Exercice 3.2).

1. Soit (x_n, y_n) une suite de $\mathbb{R}^2$ telle que $x_n = \pi n$ et $y_n = 0$. Nous avons :

$$\|(x_n, y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad h(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où h n'est pas coercive.

2. On a : $\nabla h(x, y) = (\cos x, 2(y-1))^T$ et

$$\nabla h(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Les points critiques sont donnés par : $\{((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1) / k \in \mathbb{N}\}$

3. La matrice hessienne est donnée par :

$$\nabla^2 h(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 h\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right] = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc,

- Si k est impaire, alors $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$ sont des points de minimum local.
- Si k est paire, alors $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1)$ sont des points de selle.

Correction de l'exercice 3.3 : (Exercice 3.3). On remarque que

$$z(0, y) \xrightarrow{|y| \rightarrow +\infty} -\infty$$

Alors, $z(x, y)$ n'est pas coercive. Cherchons les points critiques :

$$\nabla z(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y = 2.$$

La matrice hessienne est donnée par :

$$\nabla^2 z(-1, 2) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\det [\nabla^2 z(-1, 2)] = 4 > 0$$

et la trace égale -6. Donc, le point $(-1, 2)$ est un point de maximum local. La valeur maximale en $(-1, 2)$ est $z(-1, 2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre

Correction de l'exercice 3.4 : (Exercice 3.4).

1. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 \\ 2\alpha y + x \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

2. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\left\langle \nabla^2 f(x, y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 2(h^2 + hk + \alpha k^2)$$

Le polynôme $h^2 + hk + \alpha k^2 > 0$ si et seulement si $\Delta = k^2(1 - 4\alpha) < 0$ donc $\alpha > 1/4$.

La fonction f est strictement convexe si et seulement si $\alpha > 1/4$.

3. On pose $\alpha = 1$. Avec le changement en coordonnées polaires, on obtient :

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left(1 + \cos \theta \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \right) = +\infty$$

Alors f est coercive. D'autre part $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Alors, f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ dans un point (x^*, y^*) tel que

$$\nabla f(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^* + y^* + 1 = 0 \\ 2y^* + x^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^*, y^*) = (-2/3, 1/3).$$

4. On pose $\alpha = 1/4$.

(a) Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\left\langle \nabla^2 f(x, y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \left(h^2 + hk + \frac{k^2}{4} \right) = 2 \left(h + \frac{k}{2} \right)^2 \geq 0$$

Alors, f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

(b) On suppose que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ dans un point (x', y') , d'après la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre, on obtient :

$$\nabla f(x', y') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' + y' + 1 = 0 \\ \frac{y'}{2} + x' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = 0$$

Donc, contradiction. La fonction f n'admet pas un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 3.5 : (Exercice 3.5).

1. f est polynômiale donc de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le fait que

$$xy \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

on écrit

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

D'autre part, nous avons :

$$x^4 + \varepsilon^4 \geq 2\varepsilon^2 x^2 \text{ et } y^4 + \varepsilon^4 \geq 2\varepsilon^2 y^2, \text{ pour tout } x, y, \varepsilon \in \mathbb{R},$$

on obtient :

$$f(x, y) \geq (2\varepsilon^2 - 4)x^2 + (2\varepsilon^2 - 4)y^2 - 2\varepsilon^4.$$

Choisissons par exemple $\varepsilon = \sqrt{3}$, on en déduit :

$$f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2) - 18,$$

donc $\alpha = 2$ et $\beta = -18$.

2. Nous avons :

$$f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2) - 18 \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc f est coercive et d'autre part f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors f admette un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y) = 4 \begin{bmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

4. Calculons les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2 f(0, 0)$. Nous avons :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -2.$$

Par conséquent, f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

5. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 - y + x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0, \\ x^3 - x + y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

On en déduit que f admet trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Pour $(0, 0)$: nous avons :

$$-6 = f(1, -1) < f(0, 0) = 0 < f(1, 1) = 2.$$

Donc, $(0, 0)$ est un point selle de f sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: Nous avons :

$$\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) &= \text{tr}(\nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 40, \\ \det(\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) &= \det(\nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 384. \end{aligned}$$

D'autre part, f admette un minimum global d'après la question 2. et $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$. Alors, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont deux points de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 3.6 : (Exercice 3.6).

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Donc, on a :

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + y - \frac{1}{x} \\ 2y + x - \frac{1}{y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$$

Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\rangle = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)h^2 + 2hk + \left(2 + \frac{1}{y^2}\right)k^2 \geq 0$$

car

$$\Delta' = -\frac{k^2}{x^2 y^2} (3x^2 y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 1) \leq 0.$$

Donc, g est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. On remarque que $g(x, y) = \ln(f(x, y))$. Soient $\forall (x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, d'après la convexité de g , nous avons :

$$\begin{aligned} \ln(f((1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y'))) &\leq (1-\lambda)\ln(f(x, y)) + \lambda\ln(f(x', y')) \\ &\leq \ln[(1-\lambda)f(x, y) + \lambda f(x', y')] \\ &\quad (\text{d'après la concavité de } t \mapsto \ln(t)). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$f[(1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y')] \leq (1-\lambda)f(x, y) + \lambda f(x', y').$$

D'où, f est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Correction de l'exercice 3.7 : (Exercice 3.7).

1. h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\nabla h(x, y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y - 1 \\ 4y + 2x - 1 \end{bmatrix}$$

2. (x, y) est un point critique de h si et seulement si

$$\begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0, \\ 4y + 2x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/6, y = 1/6.$$

Donc le seul point critique de h est $A = (1/6, 1/6)$.

3. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\nabla^2 h(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Donc, $tr(\nabla^2 h(x, y)) = 8 > 0$ et $det(\nabla^2 h(x, y)) = 12 > 0$. Alors, A est un point de minimum local strict. Par conséquent, $m = h(A) = -1/6$.

4. Calculons les valeurs propres de la matrice hessienne. Nous avons :

$$P(\lambda) = det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 4 = (2 - \lambda)(6 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6.$$

Donc, la matrice hessienne est définie positive d'où h est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $m = -1/6$ est le minimum global de h sur $\mathbb{R}^2$.

5. On remarque que $\varphi(x, y) = h(e^x, e^y)$. Alors, on a :

$$\varphi(x, y) = h(e^x, e^y) \geq h(1/6, 1/6) = -1/6 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

D'autre part, nous avons : $\varphi(\ln(1/6), \ln(1/6)) = h(1/6, 1/6)$, alors φ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en $(-\ln(6), -\ln(6))$.

Correction de l'exercice 3.8 : (Exercice 3.8).

1. Nous avons : $f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ donc f n'est pas coercive.

2. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

3. Nous avons :

$$\nabla^2 f(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que $det[\nabla^2 f(0, 1)] = -36 < 0$, donc f ni convexe et ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

4. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Les points critiques de f sont $(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$.

5. Nous avons :

(a) Pour $(1, 2)$, nous avons

$$\nabla^2 f(1, 2) = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$tr(\nabla^2 f(1, 2)) = 12$ et $det[\nabla^2 f(1, 2)] = -108 < 0$, donc $(1, 2)$ est un point selle.

(b) Pour $(-1, -2)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(-1, -2) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$$

$tr(\nabla^2 f(-1, -2)) = -12$ et $det[\nabla^2 f(-1, -2)] = -108 < 0$, donc $(-1, -2)$ est un point selle.

(c) Pour $(2, 1)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(2, 1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$tr(\nabla^2 f(2, 1)) = 24$ et $det[\nabla^2 f(2, 1)] = 108 > 0$, donc $(2, 1)$ est un point de minimum local strict.

(d) Pour $(-2, -1)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(-2, -1) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$tr(\nabla^2 f(-2, -1)) = -24$ et $det[\nabla^2 f(-2, -1)] = 108 > 0$, donc $(-2, -1)$ est un point de maximum local strict.

Correction de l'exercice 3.9 : (Exercice 3.9).

1. On pose $x = e^{-y}$. Nous avons :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(e^{-y}, y) = 0.$$

Donc, f n'est pas coercive.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nous avons :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} y^2 + \ln^2(x) + 2 \ln(x) \\ 2xy \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2+2\ln(x)}{x} & 2y \\ \frac{x}{2y} & 2x \end{bmatrix}$$

3. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 0), (e^{-2}, 0)\}.$$

4. Nous avons :

$$det(\nabla^2 f(1, 0)) = 4 \quad \text{et} \quad tr(\nabla^2 f(1, 0)) = 4.$$

Donc, $(1, 0)$ est un point de minimum local strict.

$$det(\nabla^2 f(e^{-2}, 0)) = -4 \quad \text{et} \quad tr(\nabla^2 f(e^{-2}, 0)) = 0.$$

Donc, $(e^{-2}, 0)$ est un point selle.

5. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nous avons :

$$f(x, y) \geq f(1, 0) = 0.$$

Alors, $(1, 0)$ est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3.10 : (Exercice 3.10).

1. La fonction objective f est donnée par :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (x_i - at_i - b)^2.$$

2. Calculons le gradient de f en un point quelconque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(at_i + b - x_i)t_i = 2a \sum_{i=1}^n t_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i t_i.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(at_i + b - x_i) = 2a \sum_{i=1}^n t_i + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n x_i.$$

3. (a) Nous avons :

$$(a^*, b^*) \in \mathbb{R}^2 \text{ est un point critique de } f \text{ si et seulement si } \nabla f(a^*, b^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S_{t^2}a + S_tb = S_{xt} \\ S_ta + nb = S_x \end{cases}$$

La résolution de ce système donne une solution unique si $nS_{t^2} - (S_t)^2 \neq 0$. On obtient

$$a^* = \frac{nS_{xt} - S_x S_t}{nS_{t^2} - (S_t)^2} \text{ et } b^* = \frac{S_x S_{t^2} - S_{xt} S_t}{nS_{t^2} - (S_t)^2}.$$

(b) Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$(S_t)^2 = \left[\sum_{i=1}^n t_i \right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n 1^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n t_i^2 \right] \leq n \sum_{i=1}^n t_i^2 = nS_{t^2}$$

Alors,

$$nS_{t^2} \geq (S_t)^2.$$

(c) La matrice hessienne de la fonction f est donnée par :

$$\nabla^2 f(a, b) = 2 \begin{bmatrix} S_{t^2} & S_t \\ S_t & n \end{bmatrix}$$

alors, $\text{tr}(\nabla^2 f(a, b)) = S_{t^2} + n > 0$ et $\det(\nabla^2 f(a, b)) = nS_{t^2} - (S_t)^2 \geq 0$. Donc, au point (a^*, b^*) , la matrice hessienne $\nabla^2 f(a^*, b^*)$ est définie positive, alors f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Donc, (a^*, b^*) est l'unique solution globale du problème (Q).

Correction de l'exercice 3.11 : (Exercice 3.11).

1. La modélisation de ce problème est donnée par :

$$\begin{cases} \min J(\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad J(a, b) = \int_{-1}^1 (x^3 - \alpha x - \beta)^2 dx$$

2. Nous avons :

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-1}^1 (x^6 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 - 2\alpha x^4 - 2\beta x^3 + 2\alpha\beta x) dx = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle + c,$$

avec

$$X = (\alpha, \beta)^T, \quad A = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = (4/5, 0)^T \quad \text{et} \quad c = 2/7. \quad (6.3)$$

3. Le problème d'optimisation précédent est un problème d'optimisation quadratique donc la matrice hessienne associée A est définie positive. On en déduit que la fonction J est coercive sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé et de dimension finie donc ce problème possède une solution unique.
4. Nous avons :

$$\nabla J(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = 3/5 \text{ et } b = 0.$$

Correction de l'exercice 3.12 : (Exercice 3.12).

1. Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + ay - 2 \\ 2y + ax - 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

2. f_a est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] > 0$ et $\det [\nabla^2 f_a(x, y)] > 0$.
Donc, on a :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 > 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in]-2, 2[.$$

3. On pose $a = 2$.

- (a) Nous avons :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 > 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 0 \end{cases} \Rightarrow f_a \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^2$$

- (b) Nous avons :

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y)(x + y - 2).$$

Alors, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x, -x) = 0,$$

d'où f_a n'est pas coercive.

- (c) Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Donc, l'ensemble des points $\{(\mu, 1 - \mu) / \mu \in \mathbb{R}\}$ sont des points critiques. Mais la fonction f_a est convexe, donc d'après la condition nécessaire et suffisante du premier ordre la fonction f_a admet une infinité des points de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

- (d) la valeur minimale de f_a est $f_a(\mu, 1 - \mu) = -1$.

4. On pose $a > 2$.

- (a) Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 2 \\ 2y + ax = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{2+a},$$

d'où f_a admet un seul point critique $\left(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a}\right)$.

(b) Nous avons :

$$\det \left[\nabla^2 f_a \left(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a} \right) \right] = 4 - a^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{2+a}, \frac{2}{2+a} \right) \text{ est un point selle.}$$

Correction de l'exercice 3.13 : (Exercice 3.13).

1. Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + ay - 2x \\ 2 + ax - 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f_a(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & -2 \end{pmatrix}$$

2. f_a est strictement concave sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] < 0$ et $\det [\nabla^2 f_a(x, y)] > 0$. Donc, on a :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = -4 < 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 4 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in]-2, 2[$$

3. On pose $a = -2$.

(a) Nous avons :

$$\begin{cases} \text{tr} [\nabla^2 f_a(x, y)] = -4 < 0, \\ \det [\nabla^2 f_a(x, y)] = 0 \end{cases} \Rightarrow f_a \text{ est concave sur } \mathbb{R}^2$$

(b) Nous avons :

$$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Donc, l'ensemble des points $\{(\mu, 1 - \mu) / \mu \in \mathbb{R}\}$ sont des points critiques. Mais la fonction f_a est concave, donc d'après la condition nécessaire et suffisante du premier ordre la fonction f_a admet une infinité des points de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

(c) La valeur maximale de f_a est $f_a(\mu, 1 - \mu) = 1$.

Correction de l'exercice 4.1 : (Exercice 4.1).

1. A est symétrique, donc il existe une base de vecteurs propres orthonormés (v_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i A v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_1 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Alors, il existe $\alpha = \lambda_1 > 0$ tel que $\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$g(x) \geq \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| = \|x\|^2 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\|b\|}{\|x\|} \right] \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Alors, $g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, g est coercive.

3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ avec $v \neq 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} g(x+tv) &= \frac{1}{2} \langle A(x+tv), x+tv \rangle - \langle b, x+tv \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + t \langle Ax, v \rangle + \frac{t^2}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, x \rangle - t \langle b, v \rangle. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(x) = \langle \nabla g(x), v \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x+tv) - g(x)}{t} = \langle Ax - b, v \rangle.$$

Alors, $\nabla g(x) = Ax - b$.

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x) = \langle \nabla^2 g(x) v, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle A(x+tv) - b, v \rangle - \langle Ax - b, v \rangle}{t} = \langle Av, v \rangle$$

Alors, $\nabla^2 g(x) = A$

4. D'après 1. et 3. on a :

$$\langle \nabla^2 f(x) v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2, \text{ pour tout } x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, f est fortement convexe donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.

f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et d'après 3., f est coercive, alors f possède un seul point de minimum global sur $\mathbb{R}^n$ noté x^* .

5. Nous avons :

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= x^{k+1} - x^* = x^k - \rho(Ax^k - b) - x^* = x^k - x^* - \rho[A(x^k - x^*) + Ax^* - b] \\ &= (I_n - \rho A) e^k \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité.

6. On suppose que $0 < \rho < 2/\lambda_n$. Soit (v_i) une base orthonormale de vecteurs propres de A . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, on a :

$$(I_n - \rho A) x = \sum_{i=1}^n (I_n - \rho A) x_i v_i = \sum_{i=1}^n (1 - \rho \lambda_i) x_i v_i$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \|(I_n - \rho A) x\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n (1 - \rho \lambda_i) x_i v_i, \sum_{j=1}^n (1 - \rho \lambda_j) x_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n (1 - \rho \lambda_i)^2 x_i^2 \\ &\leq \max_i \{(1 - \rho \lambda_i)^2\} \|x\|^2 \end{aligned}$$

donc,

$$\|e^{k+1}\| \leq \gamma_\rho \|e^k\|, \text{ où } \gamma_\rho = \max_i \{|1 - \rho \lambda_i|\}$$

D'autre part, on a : $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ donc $1 - \rho \lambda_n \leq 1 - \rho \lambda_i \leq 1 - \rho \lambda_1$. Alors,

$$\gamma_\rho = \max_i \{|1 - \rho \lambda_i|\} = \max(|1 - \rho \lambda_1|, |1 - \rho \lambda_n|).$$

Avec un simple raisonnement par récurrence, on obtient :

$$\|e^k\| \leq \gamma_\rho^k \|e^0\|.$$

Nous avons :

$$0 < \rho < 2/\lambda_n \Rightarrow -1 < 1 - \rho\lambda_n < 1 - \rho\lambda_1 < 1 \Rightarrow \gamma_\rho < 1 \Rightarrow e^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Alors, la suite (x^k) converge vers x^* .

Correction de l'exercice 4.2 : (Exercice 4.2).

1. f est polynômiale donc de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le fait que

$$xy \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

on écrit

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

D'autre part, nous avons :

$$x^4 + \varepsilon^4 \geq 2\varepsilon^2 x^2 \text{ et } y^4 + \varepsilon^4 \geq 2\varepsilon^2 y^2, \text{ pour tout } x, y, \varepsilon \in \mathbb{R},$$

on obtient :

$$f(x, y) \geq (2\varepsilon^2 - 4)x^2 + (2\varepsilon^2 - 4)y^2 - 2\varepsilon^4.$$

Choisissons par exemple $\varepsilon = \sqrt{3}$, on en déduit :

$$f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2) - 18,$$

donc $\alpha = 2$ et $\beta = -18$.

2. Nous avons :

$$f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2) - 18 \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc f est coercive et d'autre part f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors f admette un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{bmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x, y) = 4 \begin{bmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

4. Calculons les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2 f(0, 0)$. Nous avons :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -2.$$

Par conséquent, f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

5. Nous avons :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 - y + x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0, \\ x^3 - x + y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

On en déduit que f admet trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Pour $(0, 0)$: nous avons :

$$-6 = f(1, -1) < f(0, 0) = 0 < f(1, 1) = 2.$$

Donc, $(0, 0)$ est un point selle de f sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: Nous avons :

$$\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) &= \text{tr}(\nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 40, \\ \det(\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) &= \det(\nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 384. \end{aligned}$$

D'autre part, f admette un minimum global d'après la question 2. et $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$. Alors, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont deux points de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4.3 : (Exercice 4.3).

1. h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\nabla h(x, y) = \begin{bmatrix} 4x + 2y - 1 \\ 4y + 2x - 1 \end{bmatrix}$$

2. (x, y) est un point critique de h si et seulement si

$$\begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0, \\ 4y + 2x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/6, y = 1/6.$$

Donc le seul point critique de h est $A = (1/6, 1/6)$.

3. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\nabla^2 h(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Donc, $\text{tr}(\nabla^2 h(x, y)) = 8 > 0$ et $\det(\nabla^2 h(x, y)) = 12 > 0$. Alors, A est un point de minimum local strict. Par conséquent, $m = h(A) = -1/6$.

4. Calculons les valeurs propres de la matrice hessienne. Nous avons :

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 4 = (2 - \lambda)(6 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6.$$

Donc, la matrice hessienne est définie positive d'où h est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $m = -1/6$ est le minimum global de h sur $\mathbb{R}^2$.

5. On remarque que $\varphi(x, y) = h(e^x, e^y)$. Alors, on a :

$$\varphi(x, y) = h(e^x, e^y) \geq h(1/6, 1/6) = -1/6 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

D'autre part, nous avons : $\varphi(\ln(1/6), \ln(1/6)) = h(1/6, 1/6)$, alors φ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en $(-\ln(6), -\ln(6))$.

Correction de l'exercice 4.4 : (Exercice 4.4).

1. Nous avons : $\det(A) = 4 - \alpha^2$ et $\text{tr}(A) = 4$.
2. Nous avons :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 - \alpha^2. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - |\alpha| \text{ et } \lambda_2 = 2 + |\alpha|.$$

3. La fonction g est quadratique admette un unique point de minimum global si la matrice A est définie positive, donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positive, donc $|\alpha| < 2$ c'est à dire $\alpha \in]-2, 2[$.
4. Nous avons :

$$\nabla g_\alpha(x) = Ax - b = \begin{bmatrix} 2x_1 + \alpha x_2 - 2 \\ \alpha x_1 + 2x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

5. On pose $|\alpha| < 2$ et $x^0 = \left(\frac{3}{2+\alpha}, \frac{3}{2+\alpha}\right)$.

(a) Nous avons :

$$d_0 = -\nabla g(x^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_0 = \frac{\|d_0\|^2}{d_0^T A d_0} = \frac{2}{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2 + \alpha}.$$

Donc, on a :

$$x^1 = x^0 + \rho_0 d_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2+\alpha} \\ \frac{3}{2+\alpha} \end{bmatrix} + \frac{1}{2 + \alpha} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2+\alpha} \\ \frac{2}{2+\alpha} \end{bmatrix}$$

- (b) Nous avons :
- $\nabla g(x^1) = 0$ c'est à dire x^1 est un point critique de g .
 - A est définie positive donc g est coercive et strictement convexe.
- D'après la condition nécessaire et suffisante d'optimalité de premier ordre, x^1 est l'unique point de minimum global.

Correction de l'exercice 4.5 : (Exercice 4.5).

1. Nous avons :

$$\det(A) = \alpha^2 - 2\alpha \text{ et } \text{tr}(A) = 2\alpha - 2.$$

2. Nous avons :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha - 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \alpha^2 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha - 2 \text{ et } \lambda_2 = \alpha.$$

3. La fonction g admet-elle un unique point de minimum global si $\alpha > 2$.
4. Nous avons :

$$\nabla g(x) = Ax - b = \begin{bmatrix} (\alpha - 1)x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + (\alpha - 1)x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

5. On pose $\alpha > 2$.

(a) Nous avons :

$$\rho = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad x^1 = x^0 - \rho \nabla g(x^0) = (1/\alpha, 1/\alpha).$$

(b) Donc, on a :

$$\nabla g(x^1) = 0.$$

Donc, x^1 est un point critique de g . D'autre part, $\alpha > 2$, donc x^1 est le point de minimum global de g sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4.6 : (Exercice 4.6).

1. Nous avons :

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) + 40x(x^2 - y) \\ -20(x^2 - y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 120x^2 & -40y \\ -40x & 20 \end{pmatrix}$$

2. Nous avons :

$$\nabla^2 g(0, 1) = \begin{pmatrix} -38 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det[\nabla^2 g(0, 1)] = -760 < 0 \Rightarrow g \text{ est ni convexe et ni concave.}$$

3. Nous avons :

$$g(x, y) \geq (x-1)^2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors, on a :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} g(x, y) = +\infty \Rightarrow g \text{ est coercive.}$$

D'autre part, g est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soient $z^k = (x^k, y^k)^T$ et $z^0 = (0, 0)^T$.

(a) Nous avons :

$$\nabla g(z^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \nabla^2 g(z^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\nabla^2 g(z^0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/20 \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$z^1 = z^0 - [\nabla^2 g(z^0)]^{-1} \nabla g(z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons :

$$\nabla g(z^1) = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \end{pmatrix} ; \quad \nabla^2 g(z^1) = \begin{pmatrix} 122 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\nabla^2 g(z^1)]^{-1} = \frac{1}{840} \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 40 & 122 \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$z^2 = z^1 - [\nabla^2 g(z^1)]^{-1} \nabla g(z^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nous avons :

$$\nabla g(z^2) = 0 \Rightarrow z^2 \text{ est l'unique point critique de la fonction } g.$$

D'autre part, on a :

$$g(x, y) \geq g(z^2) = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

d'où z^2 est l'unique point de minimum global de la fonction g sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4.7: (Exercice 4.7).

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= x^{k+1} - x^* = x^k - \alpha(Ax^k - b) - x^* = x^k - x^* - \alpha[A(x^k - x^*) + Ax^* - b] \\ &= (I_n - \alpha A) e^k \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité.

2. On suppose que $0 < \alpha < 2/\lambda_n$. Soit (v_i) une base orthonormale de vecteurs propres de A . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, on a :

$$(I_n - \alpha A)x = \sum_{i=1}^n (I_n - \alpha A)x_i v_i = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha \lambda_i) x_i v_i$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \|(I_n - \alpha A)x\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n (1 - \alpha \lambda_i) x_i v_i, \sum_{j=1}^n (1 - \alpha \lambda_j) x_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha \lambda_i)^2 x_i^2 \\ &\leq \max_i \{(1 - \alpha \lambda_i)^2\} \|x\|^2 \end{aligned}$$

donc,

$$\|e^{k+1}\| \leq \gamma_\alpha \|e^k\|, \text{ où } \gamma_\alpha = \max_i \{|1 - \alpha \lambda_i|\}$$

D'autre part, on a : $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ donc $1 - \alpha \lambda_n \leq 1 - \alpha \lambda_i \leq 1 - \alpha \lambda_1$. Alors,

$$\gamma_\alpha = \max_i \{|1 - \alpha \lambda_i|\} = \max(|1 - \alpha \lambda_1|, |1 - \alpha \lambda_n|).$$

Avec un simple raisonnement par récurrence, on obtient :

$$\|e^k\| \leq \gamma_\alpha^k \|e^0\|.$$

Nous avons :

$$0 < \alpha < 2/\lambda_n \Rightarrow -1 < 1 - \alpha \lambda_n < 1 - \alpha \lambda_1 < 1 \Rightarrow \gamma_\alpha < 1 \Rightarrow e^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Alors, la suite (x^k) converge vers x^* .

3. Rappelons que γ_α est appelé taux de convergence et la vitesse de convergence est définie par :

$$V_{GPF} := -\ln(\gamma_\alpha)$$

Cette vitesse est maximale lorsque γ_α est minimal. Or, on a :

$$\gamma_\alpha = \max(1 - \alpha \lambda_1, \alpha \lambda_n - 1).$$

Donc, γ_α est minimal lorsque $1 - \alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_n - 1$ ce qui correspond à

$$\alpha \equiv \alpha_0 := \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n},$$

et dans ce cas

$$\gamma_{\alpha_0} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

La vitesse maximale est alors :

$$v_{GPF} = -\ln\left(1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{2}{1 + \kappa}\right) \quad \text{où } \kappa = \lambda_n/\lambda_1.$$

Commentaire. Lorsque κ est grand, la vitesse de convergence maximale est de l'ordre de

$$v_{GPF} \approx \frac{2}{\kappa}.$$

Plus κ est grand, plus la vitesse est lente...

4. Nous avons :

(a) $\det(A - \lambda I_3) = 0$ où λ est une solution de l'équation caractéristique suivante :

$$(2 - \lambda) \left[(2 - \lambda)^2 - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Donc, les valeurs de α pour que l'algorithme (6.1) converge si $0 < \alpha < 2/\lambda_3 = 2/3$.

(b) On pose $\alpha = 1/2$, $x^0 = (0, 1, 0)^T$ et $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k)^T$. D'après l'algorithme (6.1), on a :

$$\nabla f(x^k) = Ax^k - b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^k + x_3^k - 3 \\ 2x_2^k - 2 \\ x_1^k + 2x_3^k - 3 \end{bmatrix}$$

et

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = -\frac{1}{2}x_3^k + 3/2, \\ x_2^{k+1} = 1, \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{2}x_1^k + 3/2. \end{cases}$$

Soit $y^k = x_1^k - x_3^k$. Nous avons :

$$y^{k+1} = \frac{1}{2}y^k \Rightarrow (y^k) \text{ est une suite géométrique,}$$

d'où

$$y^k = y^0 (1/2)^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

Mais $y^0 = x_1^0 - x_3^0 = 0$, donc $y^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_1^k = x_3^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} = -\frac{1}{2}x_1^k + 3/2 \Rightarrow x_1^k &= \frac{3}{2} \left[1 + (-1/2)^1 + (-1/2)^2 + \dots + (-1/2)^{k-1} \right] \\ &= 1 - (-1/2)^k. \end{aligned}$$

La suite (x^k) est donnée en fonction de k par :

$$x^k = \left[1 - (-1/2)^k, 1, 1 - (-1/2)^k \right]^T.$$

(c) Nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = x^* = (1, 1, 1)^T$$

(d) Nous avons :

$$\|x^k - x^*\| = \sqrt{2} (1/2)^k \leq 10^{-6} \Rightarrow k = E\left(\frac{11}{2} + 6 \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right) + 1 \approx 16.$$

Dr. NOUIR Brahim

Bibliographie

- [1] A. Beck. *Introduction to nonlInear optimization*. Siam, 2014.
- [2] E.K.P. Chong and S.H. zak. *An introduction to optimization*. WILEY, 2013.
- [3] J.B. Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe*. EDP Sciences, 2009.
- [4] S.G. Nash I. Griva and A. Sofer. *Linear and Nonlinear Optimization*. Siam, 2009.
- [5] D.G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 2016.

Dr. NOUIR Brahimi