

PROBLÈMES D'OPTIMISATION CONVEXE

Définition 3.1. Un problème d'optimisation convexe est un problème consistant à minimiser une fonction convexe sur un ensemble fermé et convexe. Plus explicitement, un problème d'optimisation convexe est de la forme

$$\begin{aligned} \min & f(x), \\ & x \in \Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un ensemble fermé et convexe et f est une fonction convexe sur Ω .

Exemple 3.1. Le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min & -2x + y \\ & x^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned}$$

est un problème d'optimisation convexe car la fonction objective est linéaire donc convexe et l'ensemble des contraintes est un disque fermé convexe. D'autre part, le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min & -2x + y \\ & x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

n'est pas un problème d'optimisation convexe car l'ensemble des contraintes est un ensemble fermé mais n'est pas convexe.

Théorème 3.1. Soient Ω est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et $x^* \in \Omega$. Alors, x^* est un point de minimum global de f sur Ω si et seulement si x^* est un point de minimum local de f sur Ω .

Démonstration. 1. On suppose que x^* est un point de minimum global de f sur Ω c'est à dire

$$\forall x \in \Omega, f(x^*) \leq f(x).$$

Donc, il existe $r > 0$ tel que $B(x^*, r) \subset \Omega$ et

$$\forall x \in B(x^*, r), f(x^*) \leq f(x),$$

d'où, x^* est un point de minimum local de f sur Ω .

2. Nous raisonnons par absurde. On suppose que x^* est un point de minimum local de f sur Ω et n'est pas un point de minimum global de f sur Ω . Alors, il existe $y \in \Omega$ tel que $f(y) < f(x^*)$. Avec la convexité de f , on a :

$$\forall \lambda \in]0, 1[, f[(1 - \lambda)x^* + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(y) = f(x^*) + \lambda[f(y) - f(x^*)] < f(x^*).$$

Soit (y_n) une suite définie par :

$$y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^* + \frac{y}{n}.$$

Nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x^* \text{ et } f(y_n) < f(x^*),$$

d'où x^* n'est pas un point de minimum local de f sur Ω , donc contradiction avec l'hypothèse. $\square$

Nous montrons maintenant que l'ensemble des points des minimums globaux est convexe. Pour cela, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.2. Soient Ω est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Alors, nous avons :

1. L'ensemble des points des minimums globaux de f sur Ω défini par :

$$X^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega\}$$

est un ensemble convexe.

2. Si f est strictement convexe sur Ω alors la fonction f admette au plus un point de minimum global sur Ω .

Démonstration. 1. Soient $x_1^*, x_2^* \in X^*$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons :

$$f[(1-\lambda)x_1^* + \lambda x_2^*] \leq (1-\lambda)f(x_1^*) + \lambda f(x_2^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega.$$

donc, $(1-\lambda)x_1^* + \lambda x_2^* \in X^*$ d'où X^* est convexe.

2. Soient $x_1^*, x_2^* \in X^*$ avec $x_1^* \neq x_2^*$. D'après la strictement convexe de f , nous avons :

$$f\left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_1^*) + \frac{1}{2}f(x_2^*) \leq f(x_1^*) = f(x_2^*),$$

d'où contradiction. $\square$

3.1 Condition suffisante du premier ordre : contraintes d'égalité

Théorème 3.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur l'ensemble des points réalisables suivant :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec $m \leq n$ et Ω est un convexe. On suppose qu'il existe $x^* \in \Omega$ et $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Df(x^*) + (\lambda^*)^T Dh(x^*) = 0. \quad (3.1)$$

Alors, x^* est un point de minimum global de f sur Ω .

Démonstration. La fonction f est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, en utilisant la caractérisation du premier ordre pour une fonction convexe, nous obtenons :

$$f(x) \geq f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*), \text{ pour tout } x \in \Omega. \quad (3.2)$$

En remplaçant (3.1) dans (3.2), on obtient :

$$f(x) \geq f(x^*) - (\lambda^*)^T Dh(x^*)(x - x^*). \quad (3.3)$$

Puisque Ω est convexe c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in]0, 1[, (1 - \alpha)x^* + \alpha x \in \Omega.$$

Donc, nous avons :

$$h[(1 - \alpha)x^* + \alpha x] = h[x^* + \alpha(x - x^*)] = 0, \text{ pour tout } \alpha \in]0, 1[.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{(\lambda^*)^T h[x^* + \alpha(x - x^*)] - (\lambda^*)^T h(x^*)}{\alpha} = 0, \text{ pour tout } \alpha \in]0, 1[.$$

Avec passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ et h est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient :

$$(\lambda^*)^T Dh(x^*)(x - x^*) = 0. \quad (3.4)$$

De (3.3) et (3.4), on trouve :

$$f(x) \geq f(x^*), \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

D'où, x^* est un point de minimum global de f sur Ω . □

3.2 Condition suffisante du premier ordre : contraintes d'inégalité

Théorème 3.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur l'ensemble des points réalisables suivant :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0; g(x) \leq 0\},$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $m \leq n$, et Ω est un convexe. On suppose qu'ils existes $x^* \in \Omega$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tels que

1. $\mu^* \geq 0$,
2. $Df(x^*) + (\lambda^*)^T Dh(x^*) + (\mu^*)^T Dg(x^*) = 0$,
3. $\mu_i^* g_i(x^*) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, p$.

Alors, x^* est un point de minimum global de f sur Ω .

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. Par la caractérisation du premier ordre pour une fonction convexe, nous avons :

$$f(x) \geq f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*)$$

En utilisant la condition 2. du Théorème 3.4, on obtient :

$$f(x) \geq f(x^*) - (\lambda^*)^T Dh(x^*)(x - x^*) - (\mu^*)^T Dg(x^*)(x - x^*). \quad (3.5)$$

Puisque Ω est convexe, donc

$$(1 - \alpha)x^* + \alpha x \in \Omega, \text{ pour tout } \alpha \in]0, 1[.$$

Ainsi,

$$g[(1 - \alpha)x^* + \alpha x] = g[x^* + \alpha(x - x^*)] \leq 0, \text{ pour tout } \alpha \in]0, 1[. \quad (3.6)$$

En utilisant la condition 3. du Théorème 3.4 et (3.6), nous obtenons :

$$\frac{(\lambda^*)^T [x^* + \alpha (x - x^*)] - (\lambda^*)^T g(x^*)}{\alpha} \leq 0.$$

Par passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$(\lambda^*)^T Dg(x^*) (x - x^*) \leq 0. \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.4) et (3.7) dans (3.5), on obtient :

$$f(x) \geq f(x^*).$$

D'où, x^* est un point de minimum global de f sur Ω . □