

La suite de série pour le premier chapitre

Exercice 1.4 Montrer que si A est un sous ensemble standard de $\mathbb{R}^2$ alors ses deux projections sur l'axe des x et l'axe des y sont des sous ensembles standard

de $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

c) Soit $\omega \cong +\infty$ un entier donné. La fonction $g(x) = x^\omega + 2x + 10$ est-elle continue ?

Exo 2. Soit F un ensemble fini contenant tous les standard de $\mathbb{R}$ et $\omega \cong +\infty$ un entier.

a) Trouver $^s \{x \mid x \in \mathbb{Q} \cap F \text{ \& } 0 \leq x < 1\}$.

b) Trouver $^s \{(x, x^{2\omega+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

ExO

a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \forall \partial \cong 0 \ f(x + \partial) \cong f(x).$$

b) Etudier, en utilisant a), l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^3 + x^2$.

Exo 2 (3 pts). Trouver les standardisés des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ ($\varepsilon \simeq 0$ positif).

$$B_1 =]-1 + \varepsilon, 1].$$

$$B_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \forall \partial \cong 0 \ f(x + \partial) \cong f(x)\}.$$

Exo 3 (3 pts). Donner, avec justification, pour chacun des ensembles suivants sa nature (i.e. interne standard, interne non standard, externe)

$$A_1 = \{1, 2, \sqrt{5}\}, A_2 = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup [2, \pi] \right), A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \simeq 1 \text{ ou } x \simeq -1\}$$

où ε est un réel infiniment petit positif.

Exo 4 (3 pts). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille interne de réels illimités. Montrer que $\inf_{i \in I} \omega_i$ est un illimité.

Exo 5 On dit qu'une famille interne d'ensembles internes $(A_i)_{i \in I}$ possède la propriété d'intersection finie si, pour toute partie finie Z de I , $Z = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, on a $\bigcap_{i \in Z} A_i \neq \emptyset$. Montrer qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ qui possède la propriété d'intersection finie, possède également la propriété suivante : $\bigcap \{A_i \mid i \in I \text{ et } st(i)\} \neq \emptyset$.

Exo 1. Existe-t-il dans le plan xy une droite standard D qui passe par le point $(1, \varepsilon)$ où ε est un réel infiniment petit positif.

Exo 2. Dire pourquoi dans tout ensemble infini il y a au moins un élément non standard.

Exo 3. Donner, avec justification, pour chacun des ensembles suivants sa nature (i.e. interne standard, interne non standard, externe)

$$A_1 = \left\{ 1, 2, \sqrt{2 + \frac{\sin(2)}{2}} \right\}, \quad A_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = \omega\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid st(x) \text{ \& } x^2 + 1 \simeq 1\}.$$

où ω est un réel illimité positif.

Exo 4. Soient x et y deux réels limités. Montrer que

$${}^0(xy) = {}^0x \cdot {}^0y, \quad {}^0\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{{}^0x}{{}^0y} \text{ si } {}^0y \neq 0.$$

Exo 2. Soit F un ensemble fini contenant tous les standard de $\mathbb{R}$ et $\omega \cong +\infty$ un entier.

a) Trouver ${}^s\{x \mid x \in \mathbb{Q} \cap F \text{ \& } 0 \leq x < 1\}$.

b) Trouver ${}^s\{(x, x^{2\omega+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice. Soient E un espace topologique standard et x un élément standard de E . Montrer qu'il existe un voisinage de x contenu dans tous les voisinages standard de x . Donner un exemple d'un tel voisinage dans le cas où E est un espace métrique.

Exercice. Montrer qu'il existe un entier premier illimité. Montrer que si $\omega \simeq +\infty$, il existe un premier p illimité tel que $\frac{p}{\omega}$. Existe-t-il un entier premier illimité p tel que $p < \omega$?

Exercice.

a) Montrer que, si $F \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini qui contient tous les standard de $\mathbb{R}$, toute fonction standard f , définie sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur F .

b) Etudier le raisonnement suivant et dire pourquoi il est faux: " Toute fonction standard est un polynôme : en effet soit $f(x)$ une fonction standard et soit $p(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange, égal à f en tout point de F . Comme les fonctions p et f coïncident en tout point standard, elles sont égales. Donc $f(x)$ est un polynôme. "