

Exercice 1

1/ On a  $(1+x+x^2+\dots+x^m+\dots)(1-x)$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^m+\dots) - x(1+x+x^2+\dots+x^m+\dots)$$

$$= 1 \Rightarrow 1+x+x^2+\dots+x^m+\dots = \frac{1}{1-x} \dots (*)$$

2) a) On remplace  $x$  par  $-x$  dans la formule (\*)

0,5 pt

On obtient :

$$1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^m + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^m x^m + \dots$$

ce qui correspond à la séquence :

$$(1, -1, 1, -1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

0,5 pt

b) On remplace  $x$  par  $ax$  dans (\*),

On obtient :

$$1 + (ax) + (ax)^2 + \dots + (ax)^m + \dots$$

$$= 1 + ax + a^2 x^2 + \dots + a^m x^m + \dots$$

ce qui correspond à la séquence :

$$(1, a, a^2, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-ax} \dots (**)$$

0,5 pt

c) On a  $(1, 1, 1, 1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}$

+  $(1, -1, 1, -1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1+x}$

$(2, 0, 2, 0, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$

0,5 pt

d) On remplace  $a$  par  $2$  dans \*\*,  $\frac{1}{1-2x}$

On obtient :  $1 + 2x + 4x^2 + \dots \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x}$

1

0,5 pt

On a  $(1, 1, 1, 1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}$

donc  $(1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \cdot (1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$   
 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$

$= (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$

avec  $c_0 = a_0 b_0 = 1 \times 1 = 1$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 + 1 = 2$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + 1 + 1 = 3$

$\vdots$   
 $c_n = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$

1 pt

a) Fonction génératrice de choix dans  $A = \{a\}$

est  $f(x) = 1 + x$  (ou bien  $f(x) = 1 + ax$ )

et celui de  $B = \{b\}$   $g(x) = 1 + x$

et par suite la fonction de choix dans  $A \cup B = \{a, b\}$

$$\text{est } (1+x)(1+x) = 1 + 2x + x^2$$

Choix de 0 éléments  
de  $\{a, b\}$

2 façons  
de choisir  
1 élément  
soit  $\{a\}$   
soit  $\{b\}$

1 seule façon  
de choisir  
2 éléments  
soit  $\{a, b\}$

b) Soient  $A, B$  deux  
ensembles avec  $A \cap B = \emptyset$

- choix de  $A \rightarrow A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

- choix de  $B \rightarrow B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

Le choix dans  $C = A \cup B$  est  $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

avec  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$

c) Fonction de choix des pommes

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

Fonction de choix de bananes:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (x^5)^n = \frac{1}{1-x^5}$$

Fonction de choix d'oranges :

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

- Fonction de choix des fraises :

$$F(x) = 1 + x$$

Donc la fonction de choix pour le panier est

$$P(x) \cdot B(x) \cdot O(x) \cdot F(x) = \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^5)} \cdot \frac{(1-x^5)}{(1-x)} \cdot (1+x)$$

$$= \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1+x)} \cdot (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

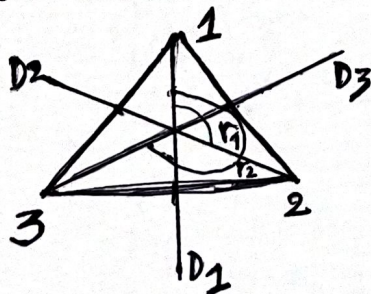
→ Le coefficient de  $x^n$  est  $\boxed{n+1}$

Il y'a donc  $(n+1)$  façons de composer un panier de  $n$  fruits.

Ex n° 3

(7pts)

On considère le groupe de symétrie du triangle équilatéral



$$\text{id} \mapsto (1) = \pi_1$$

$$r_{120^\circ} \mapsto (123) = \pi_5$$

$$r_{240^\circ} \mapsto (132) = \pi_6$$

$$\text{reflection}/D_1 \mapsto (23) = \pi_4$$

$$\text{reflection}/D_2 \mapsto (13) = \pi_3$$

$$\text{reflection}/D_3 \mapsto (12) = \pi_2$$

Le groupe  $S_3$  agit transitivement sur l'ensemble  $X = \{1, 2, 3\}$

$$\text{On a } \forall x \in \{1, 2, 3\} : \text{Orb}(x) = \{1, 2, 3\}$$

- (4) -

1,5 pts

$\text{stab}(x_i)$  pour  $x_i \in \{1, 2, 3\}$

$$\text{stab}(x) = \{ g \in S_3 \mid g \cdot x = x \}$$

ona  $\text{stab}(1) = \{ (1), (23) \}$  st-un type de  $S_3$ .

$$\text{stab}(2) = \{ (1), (13) \}$$
 " ————

$$\text{stab}(3) = \{ (1), (12) \}$$
 " ———— de  $S_3$

1,5pb

On  $|\text{stab}(1)| = |\text{stab}(2)| = |\text{stab}(3)| = 2$

et  $|S_3| = 3! = 6$ .

On a le nombre d'orbites par cette formule st

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{stab}(x_i)| = \frac{1}{6} (2+2+2) = \frac{6}{6} = 1 \text{ seule orbite.}$$

1pb

Le même résultat peut être obtenu par la formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^6 \text{fix}(\pi_i)$$

On  $\text{fix}(\pi_0) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |\text{fix}(\pi_0)| = 3$

$\text{fix}(\pi_1) = \emptyset \Rightarrow |\text{fix}(\pi_1)| = 0$

$\text{fix}(\pi_2) =$

$\text{fix}(\pi_1) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow |\text{fix}(\pi_1)| = 3$

$\text{fix}(\pi_2) = \{3\} \Rightarrow |\text{fix}(\pi_2)| = 1$

$\text{fix}(\pi_3) = \{2\} \Rightarrow |\text{fix}(\pi_3)| = 1$

$\text{fix}(\pi_4) = \{1\} \Rightarrow |\text{fix}(\pi_4)| = 1$

$\text{fix}(\pi_5) = \emptyset \Rightarrow |\text{fix}(\pi_5)| = 0$

$\text{fix}(\pi_6) = \emptyset \Rightarrow |\text{fix}(\pi_6)| = 0$

$$\frac{1}{6} (3+1+1+1) = \frac{6}{6} = 1$$

1pb

5

\* Si on fait colorier les sommets par deux couleurs  $\{m, b\}$ , le nombre de coloriage sans tenir compte des coloriages équivalents st-

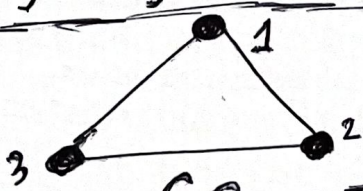
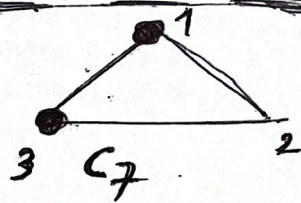
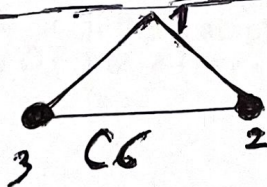
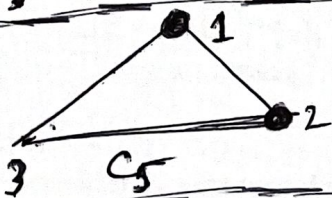
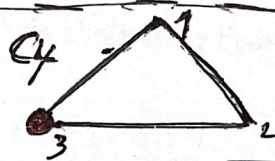
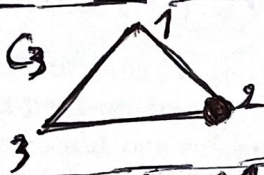
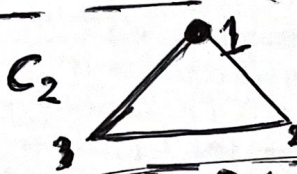
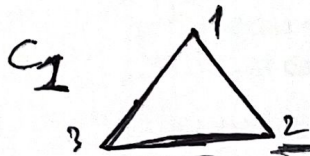
$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

nombre de coloriage du sommet 1  $\{m, b\}$

nombre de coloriage du sommet 2  $\{m, b\}$

nombre de coloriage du sommet 3  $\{m, b\}$

(2) pb



évidemment, ma 4 orbits = 4 coloriages différents  
qui peut être calculé par la formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^6 |fix(\pi_i)| = \frac{1}{6} (8 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2) = \frac{24}{6} = 4$$

Coloriages différents

ma  $|G| = 6$

$$|fix(\pi_1)| = |\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}| \Rightarrow |fix \pi_1| = 8$$

$$|fix(\pi_2)| = |\{C_1, C_4, C_5, C_8\}| = 4$$

$$|fix(\pi_3)| = |\{C_1, C_2, C_3, C_8\}| = 4$$

$$|fix(\pi_4)| = |\{C_1, C_6, C_7, C_8\}| = 4$$

$$|fix \pi_5| = |\{C_1, C_8\}| = 2$$

$$|fix \pi_6| = |\{C_1, C_8\}| = 2$$

\* Pour 4 couleurs on trouve 10 Coloriages différents

(6)

Résoudre la récurrence linéaire

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \text{ avec } a_0 = 1 \text{ et } a_1 = 8$$

solution

On pose  $a_n = r^n$ , on obtient

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow r^{n-2}[r^2 - r - 6] = 0 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0$$

$$\text{On a } r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$$

$$\Rightarrow r = 3 \text{ et } r = -2$$

3pts

On obtient donc

$$a_n = A \cdot 3^n + B(-2)^n$$

avec les conditions  $a_0 = 1 = A \cdot 3^0 + B(-2)^0 \Rightarrow A + B = 1$

$$a_1 = 8 = A \cdot 3^1 + B(-2)^1 \Rightarrow 3A - 2B = 8$$

$$\Rightarrow A = 2, B = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 2 \cdot 3^n + (-1)^{n+1} (2^n)}$$

\* Le Coefficient de  $x^n$  dans  
le produit  $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots)^2$

$$= (1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots)$$

le coefficient de  $x^n$  s'obte. par

$$(1 \cdot x^n + x \cdot x^{n-1} + \dots + x^n \cdot 1) \quad \boxed{(n+1)x^n}$$

car  $n+1$  termes donc :