

CHAPITRE1

Minimisation avec contraintes

Partie1

- Résultat d'existence et d'unicité.
- Condition d'optimalité du 1^{er} ordre.
 - ❖ Conditions d'optimalité du 1^{er} ordre générale.
 - ❖ Contraintes d'égalité.
 - ❖ Contraintes en égalité et en inégalité.
- **Partie2**
 - ❖ Conditions d'optimalité nécessaires du 2^{ème} ordre.
 - ❖ Exercices.

Généralités

L'optimisation d'un point de vue générale peut présenter sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } X^* \text{ telle que:} \\ f(X^*) \leq f(X) \end{array} \right., \forall X \in K \quad \text{ou bien : } \left\{ \begin{array}{l} \min f(X) \\ X \in K \end{array} \right. \dots (1)$$

Avec : $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un espace normé K , elle dite fonction **objective**.

Notation : $\left\{ \begin{array}{l} X^* \text{ est la solution optimale} \\ K \text{ est l'ensemble des contraintes données} \end{array} \right.$

On distingue deux types pour le problème(1) :

✓ Avec contraintes d'égalités sont souvent données par :

$$K = \{X \in \mathbb{R}^n : h_i(X) = 0, \forall i \in I\}$$

✓ Avec contraintes d'inégalités sont souvent données par :

$$K = \{X \in \mathbb{R}^n : \psi_i(X) \leq 0, \forall i \in I\}$$

✓ Il existe aussi des problèmes appelés **mixtes (avec contraintes d'égalités et d'inégalité)** dont:

$$K = \{X \in \mathbb{R}^n : h_i(X) = 0 ; \psi_i(X) \leq 0, \forall i \in I\}, \text{ avec : } h_i \text{ et } \psi_i \text{ sont des fonctions continues}$$

1. Résultat d'existence et d'unicité

1.1. Existence

Théorème1 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et K un $\mathbb{R}$ -ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ alors :

a)- Si K est borné alors : $\exists X^* \in K : f(X^*) \leq f(X), \forall X \in K$

b)- Si K n'est pas borné et f est croissante à l'infini (coércive) alors :

$$\exists X^* \in K : f(X^*) \leq f(X), \quad \forall X \in K$$

Démonstration :

a)- Si K borné (et il est fermé) alors il est **compact** et on a la fonction f est **continue** sur K alors : f atteint ses bornes, donc :

$$\exists X^* \in K : f(X^*) \leq f(X), \quad \forall X \in K$$

b)- Si la fonction f est croissante à l'infini : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists M > 0, \forall X \in K : \|X\| > M \Rightarrow f(X) \geq A$$

$$\exists M > 0, \|X\| > M \Rightarrow f(X) \geq f(0)$$

$$\text{Si: } \|X\| > M \Rightarrow X^* = 0$$

$$\text{Si: } \|X\| < M \Rightarrow f(X) \geq f(X^*)$$

$$\text{donc : } \min f(X) = \min_{X \in K \cap B(0, A)} f(X)$$

On a : $K \cap \overline{B(0, A)}$ est un fermé d'un compact alors : $K \cap \overline{B(0, A)}$ est un compact, et comme f est continue alors le problème atteint ses bornes, d'où :

$$\exists X^* \in K: f(X^*) \leq f(X) \quad , \quad \forall X \in K$$

1.2. Unicité

Théorème2 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement convexe et K un convexe alors le problème défini (1) admet au plus une solution.

Démonstration : Soit $X_1, X_2 \in K$ deux solutions du problème (1) telles que : $X_1 \neq X_2$

On a $f(X_1) = f(X_2)$ et comme f et K sont convexes, alors si on prend par exemple : $\lambda = \frac{2}{3}$ nous donne

$$f\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) < \frac{2}{3}f(X_1) + \frac{1}{3}f(X_2) = f(X_2) \text{ Contradiction. Alors : } X_1 = X_2$$

Conclusion : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et K un -s-ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ alors :

- La solution du problème (1) existe si K borné ou f coercive.
- La solution du problème (1) est unique si f est strictement convexe.

Exemple1 Montrer que le problème (P) suivant admet une solution unique : $\begin{cases} \min (x^2) \\ x \in K = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 1\} \end{cases}$

En effet,

- La solution de (P) existe car : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$, c'est-à-dire : $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et f coercive ($f''(x) = 2 > 0$) , D'autre part : $K = [-1, 1]$ fermé borné
- K convexe : $\forall x, y \in K, \exists \lambda \in]0, 1[: |(1 - \lambda)x + \lambda y| \leq |(1 - \lambda)x| + |\lambda y| = (1 - \lambda)|x| + \lambda|y| \leq 1$
Donc le problème (P) admet une solution.

2. Condition d'optimalité du 1^{er} ordre

2.1 Problème de minimisation avec contraintes d'égalité

Soit le problème de minimisation avec contraintes d'égalité : $\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \end{cases}$

Avec : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction objective et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions continues dites fonctions contraintes avec $m \leq n$

Définition1 Un point X^* vérifie : $h_1(X^*) = h_2(X^*) = \dots = h_m(X^*) = 0$ est dit **point régulier** des contraintes si l'ensemble $(\nabla h_i(X^*))_{1 \leq i \leq m}$ est **libres**

Remarques

✚ Soit $Dh(X^*) = \left(\frac{\delta h_i}{\delta x_j} \right) (X^*) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(X^*)^t \\ \nabla h_2(X^*)^t \\ \vdots \\ \nabla h_m(X^*)^t \end{pmatrix}$, alors X^* est régulier ssi le $\text{rang}(Dh(X^*)) = m$

✚ L'ensemble des contraintes $h_1(X) = 0, h_2(X) = 0, \dots, h_m(X) = 0$ décrit une surface $S = \{h_1(X) = 0, h_2(X) = 0, \dots, h_m(X) = 0\}$

Les points de S sont réguliers, au plus : $\dim(S) = n - m$

Exemple2 Soit $n = 3$ et $m = 2$ et $h_1(X) = x_1$, $h_2(X) = x_2 - x_3^2$, avec $X = (x_1, x_2, x_3)^T$

En effet : on a $\nabla h_1(X) = (1, 0, 0)^T$ et $\nabla h_2(X) = (0, 1, -2x_3)^T$ c'est-à-dire l'ensemble $\{\nabla h_1(X), \nabla h_2(X)\}$ est libre donc $\dim(S) = 1$ et l'ensemble S définit une courbe dans $\mathbb{R}^3$

Espaces tangents et normaux

Définition1 Soit : $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que le sous-espace de $\mathbb{R}^n$,

$T(X^*) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Dh(X^*) \cdot Y = 0\}$ définit l'espace tangent sur la surface $S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0\}$ au point X^* .

Définition2 Le sous-espace défini par : $N(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^n : Dh(X^*)^t \cdot Y, Y \in \mathbb{R}^n\}$ dit l'espace normal sur la surface $S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0\}$ au point X^*

Remarques

$$T(X^*) = \ker(Dh(X^*))$$

Si le point X^* est régulier alors : $\dim(T(X^*)) = n - m$

L'ensemble : $P_T(X^*) = T(X^*) + X^* = \{X + X^*, X \in T(X^*)\}$ définit le plan tangent au point X^*

L'ensemble : $P_N(X^*) = X^* + N(X^*) = \{X^* + X, X \in N(X^*)\}$ définit le plan normal au point X^*

$$T(X^*) = N(X^*)^\perp \text{ et } T(X^*)^\perp = N(X^*)$$

Condition de Lagrange (Condition nécessaire) :

Théorème3 : Soit le problème : $\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \end{cases} \quad (1)$, avec : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions différentiables ($m \leq n$), et le $\text{rang}(Dh(X^*)) = m$; (c-à-d. : $X^* \in \mathbb{R}^n$ point régulier du problème(1)).

Si X^* est un point de minimum local du problème(1), alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^t$$

Démonstration : On montre alors : $Df(X^*) \in N(X^*)$ il suffit de montrer que : $\nabla f(X^*) \in T(X^*)^\perp$,

Si on prend : $y \in T(X^*)$, alors il existe une courbe $S = \{X(t), t \in]a, b[\}$ où : $\forall t \in]a, b[: h(X(t)) = 0$

Alors $\exists t^* \in]a, b[: X(t^*) = X^*$ et $X'(t^*) = y$, on remarque que : t^* est un minimum local de la fonction $f(X(t))$, donc :

$$\frac{df(X(t))}{dt} = Df(X^*)X'(t^*) = Df(X^*)y = \nabla f(X^*)^T y = 0 \text{ (d'après la C.N. du 1}^\text{er} \text{ ordre de l'optimalité sans contraintes), d'où : } \nabla f(X^*) \in T(X^*)^\perp$$

Remarques

Les coefficients $\lambda_i, 1 \leq i \leq m$ appelés **multiplicateurs de Lagrange**.



En pratique, Si les conditions du théorème (3) sont satisfaites, pour calculer le vecteur X^* on doit résoudre un système de $(n + m)$ d'équations suivant :
$$\begin{cases} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) = 0 \\ h_i(X^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Exemple3 $\begin{cases} \min (xy) \\ x + y = 1 \end{cases}$

On a : $f(X) = x.y$ et $h(X) = x + y - 1$, avec : $X = (x, y)^T$, les conditions de théorème (3) sont vérifiées car : $f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $Dh(X) = \nabla h(X) = (1, 1)^T \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, alors : $\dim(\text{Im} Dh) = 1$

On résout maintenant le système suivant :
$$\begin{cases} \nabla f(X) + \lambda \nabla h(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ h(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \lambda = 0 \dots \dots \dots (1) \\ y + \lambda = 0 \dots \dots \dots (2) \\ x + y - 1 = 0 \dots \dots (3) \end{cases}$$

$$X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \text{ De (1) et (2) : } \lambda = -\frac{1}{2}, \text{ qui nous donne : } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ donc : } \boxed{X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T}$$

Formulation Lagrangienne La fonction $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, avec : $(X, \lambda) \mapsto \mathcal{L}(X, \lambda)$

$\mathcal{L}(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(X)$ dite fonction de Lagrange.

Donc de théorème (3), on peut dire que: Si X^* est un point de minimum (ou maximum) local, alors:

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}^m: D\mathcal{L}(X^*, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^m}^t} \text{ c-à-d. : } \begin{cases} Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) = 0_{\mathbb{R}^m}^t \\ h(X^*) = 0 \end{cases}$$

que veut dire que : $(X^*, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est une solution du problème : $\begin{cases} \min \mathcal{L}(X, \lambda) \\ (X, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$

Exercice Déterminer la solution du problème suivant : $\begin{cases} \max X^t Q X \\ X^t P X = 1 \end{cases}$ s'il existe, où :

Q : Matrice carrée d'ordre n symétrique et semi-définie positive

P : Matrice carrée d'ordre n symétrique et définie positive

2.2 Problème de minimisation avec contraintes d'inégalité

Définition3 Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, trois fonction différentiables avec : $p \leq n$

Le problème : $\begin{cases} \min f(X) \\ g(X) \leq 0 \end{cases}$ (2) est dite problème de minimisation avec contraintes d'inégalité

Définitions4

- Si : $g(X^*) = 0$, on dit que la contrainte d'inégalité $g(X) \leq 0$ est **active** au point X^*
- Si : $g(X^*) < 0$, on dit la contrainte d'inégalité $g(X) \leq 0$ est **inactive** au point X^*
- X^* est un point régulier si la famille des vecteurs : $\{\nabla g_j(X^*), j \in J(X^*)\}$ est libre, avec : $J(X^*) = \{1 \leq j \leq m, g_j(X^*) = 0\}$.

Théorème Karush-Kuhn-Tucker(K.K.T.) : Soit le problème de minimisation: $\begin{cases} \min f(X) \\ g(X) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$,

avec : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions différentiables ($m \leq n$), et $X^* \in \mathbb{R}^n$ point régulier du problème(2)

Si X^* est un **point de minimum local** du problème(2), alors il existe : $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} (1) \mu \geq 0; (c - \lambda - d): \mu_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m \\ (2) Df(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Remarque En pratique, l'utilisation de théorème de (K.K.T) consiste à résoudre un système de $(n+m)$

équations et $(2m)$ inéquations suivant :

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(X^*) = 0 \\ \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ g_i(X^*) \leq 0 \\ \mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Exemple4 $\begin{cases} \min (x^2 + y^2) \\ X \in K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \geq 1\} \end{cases}$

On a : $f(x, y) = x^2 + y^2$, et $g_i(x) = g(x) = -x - y + 1$; les conditions du théorème de K.K.T sont vérifiées car : les fonctions f, g sont différentiables et $\nabla g_j(X^*) = (-1, -1)^T$ L.I

Donc : $\exists \mu: \begin{cases} \mu \geq 0 \\ \nabla f(X^*) + \mu \nabla g(X^*) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \mu g(X^*) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \geq 0 \\ 2x - \mu = 0 \\ 2y - \mu = 0 \\ \mu(-x - y + 1) = 0 \\ -x - y + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$

De (3) : $\mu = 0 \vee -x - y + 1 = 0$

*) Si $\underline{\mu = 0}$: alors $_(x, y) = (0, 0)$ mais cette solution ne vérifie pas l'inégalité (4)

*) Si $-x - y + 1 = 0$ alors : $\begin{cases} 2x - \mu = 0 \\ 2y - \mu = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \quad (3') \quad \text{donc : } x = y \text{ et de l'équation (3') , on trouve}$

$x = y = \frac{1}{2}$ par conséquent : $\mu = 1$

Alors : la solution est : $X^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

2.3 Problème de minimisation avec contraintes d'égalité et d'inégalité

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, trois fonction différentiables où : $m \leq n$

Le problème :
$$\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$
 est dite problème de minimisation avec contraintes d'égalité et d'inégalité.

Pour ce problème, nous citons les définitions suivantes :

Définition 5 Soit X^* tel que : $h(X^*) = 0$ et $g(X^*) \leq 0$, on dit que X^* est un point régulier si les vecteurs : $\nabla h_i(X^*), \nabla g_j(X^*)$ où : $1 \leq i \leq m$ et $j \in J(X^*)$ sont linéaire ment indépendants.

Théorème Karush-Kuhn-Tucker(K.K.T.) : Soit le problème de minimisation:
$$\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$
,

avec : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ où ($m \leq n$) et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ des fonctions de classe C^1 ($m \leq n$), soit $X^* \in \mathbb{R}^n$ point régulier du problème(3)

Si X^* est un **point de minimum local** du problème(3), alors il existe : $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} 1) \mu \geq 0; (c - \text{à} - d.: \mu_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq p) \\ 2) Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^T \\ 3) \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 4) h(X^*) = 0 \\ 5) g(X^*) \leq 0 \end{cases}$$

Remarque1 la condition(3) veut dire que : si : $\mu_i = 0$, alors : $g_i(X^*) < 0$ sinon : $\mu_i > 0$, alors : $g_i(X^*) = 0$

Démonstration On a X^* est un point de minimum local du problème(3) c'est-à-dire qu'il soit aussi un min local de f sur l'ensemble des points actifs : $K = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0, g_j(X) = 0 : j \in J(X^*)\}$, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p : Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^T \text{ et } \forall j \notin J(X^*) : \mu_j = 0 (\text{voir la remarque}).$$

Maintenant, nous reste de montrer : $\mu_j > 0, \forall j \in J(X^*)$

Supposons : $\exists j \in J(X^*) : \mu_j < 0$, Soit l'espace tangent : $T(X^*) = \{y \in \mathbb{R}^n : Dh(X^*)y = 0, Dg(X^*)y = 0, i \in J(X^*), i \neq j\}$ de la surface : $S = \{X \in \mathbb{R}^n : h(X) = 0, g_i(X) = 0, i \in J(X^*), i \neq j\}$

On peut dire qu'il existe : $y \in T(X^*) : Dg_j(X^*)y \neq 0$, et sans perte de généralité, on suppose que nous avons y tel que : $Dg_j(X^*)y < 0$, alors :

$$Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu_j^T Dg_j(X^*) + \sum_{i \neq j}^n \mu_i^T Dg_i(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^T \quad (1)$$

Multipliant l'équation (1) par $y \in T(X^*)$, on obtient : $Df(X^*)y = -\mu_j^T Dg_j(X^*)y < 0$, Alors :

$$\exists t^* \in]a, b[: X(t^*) = X^* \text{ et } \dot{X}(t^*) = y, \text{ donc : } Df(X^*)y = Df(X^*)\dot{X}(t^*) = \frac{d}{dt}f(X(t^*)) < 0$$

Qui veut dire : $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in]t^*, t^* + \varepsilon] : f(X(t)) \leq f(X(t^*)) = f(X^*)$. Aussi :

$$Dg_j(X^*)y = \frac{d}{dt}g_j(X(t^*)) < 0$$

C-à-d. : $\exists \alpha > 0 : \forall t \in]t^*, t^* + \alpha] : g_j(X(t)) \leq g_j(X^*) = 0$, Alors on a :

$\forall t \in]t^*, t^* + \theta] : f(X(t)) \leq f(X^*)$, où : $\theta = \min(\varepsilon, \alpha)$, (contradiction car : X^* est le min local de problème).

Remarques

- Pour un problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité suivant :
$$\begin{cases} \max f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases}$$

Les conditions de K.K.T s'écrivent de la forme :
$$\begin{cases} 1) \mu \geq 0 \\ 2) -Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0^T \\ 3) \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 4) h(X^*) = 0 \\ 5) g(X^*) \leq 0 \end{cases}$$

Ou bien par la forme :
$$\begin{cases} 1) \mu \leq 0 \\ 2) Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0^T \\ 3) \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 4) h(X^*) = 0 \\ 5) g(X^*) \leq 0 \end{cases}$$

- Pour un problème de minimisation avec contraintes d'inégalité suivant :
$$\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \geq 0 \end{cases}$$

Les conditions de K.K.T s'écrivent de la forme :
$$\begin{cases} 1) \mu \leq 0 \\ 2) Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0^T \\ 3) \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 4) h(X^*) = 0 \\ 5) g(X^*) \geq 0 \end{cases}$$

- Pour un problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité suivant :
$$\begin{cases} \max f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \geq 0 \end{cases}$$

Les conditions de K.K.T s'écrivent de la forme :
$$\begin{cases} 1) \mu \geq 0 \\ 2) Df(X^*) + \lambda^T Dh(X^*) + \mu^T Dg(X^*) = 0^T \\ 3) \mu_i g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p \\ 4) h(X^*) = 0 \\ 5) g(X^*) \geq 0 \end{cases}$$

Exemple5 Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min (x_1^2 - 1)^2 + x_2^2 \\ X \in K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1 - 1 = 0, \quad x_1 + x_2 - 4 < 0\} \end{cases}$$

Solution On a: $f(X) = (x_1^2 - 1)^2 + x_2^2$, $h(X) = x_2 - x_1 - 1$ et $g(X) = x_1 + x_2 - 4$

$$\exists \mu \geq 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} \nabla f(X^*) + \lambda \nabla h(X^*) + \mu \nabla g(X^*) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \mu g(X^*) = 0 \\ h(X^*) = 0 \\ g(X^*) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x_1 - 1) - \lambda + \mu = 0 & (1) \\ 2x_2 + \lambda + \mu = 0 & (2) \\ \mu(x_1 + x_2 - 4) = 0 & (3) \\ x_1 + x_2 - 4 \leq 0 & (4) \\ x_2 - x_1 - 1 = 0 & (5) \\ \mu \geq 0 & (6) \end{cases}$$

De l'équation (3) : $\mu = 0$ ou $(x_1 + x_2 - 4) = 0$

$$\text{Si : } \underline{\mu = 0} \text{ on trouve : } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ x_2 - x_1 - 1 = 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \text{ alors } X = (0, 1)^T, \lambda = -2 \text{ et } \mu = 0$$

Si : $(x_1 + x_2 - 4) = 0$: on trouve $\mu = -3 < 0$ impossible

Donc la solution est : $X = (0, 1)^T, \lambda = -2 \text{ et } \mu = 0$

3. Condition d'optimalité de second ordre

3.1 Problème de minimisation avec contraintes d'égalité

Soit : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $(m \leq n)$ deux fonctions de classe C^2 avec $(m \leq n)$. Soit

$\mathcal{L}(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(X)$ la fonction de Lagrange. On note $L(X, \lambda)$ la matrice hessienne de $\mathcal{L}(X, \lambda)$ par rapport à X : $L(X, \lambda) = F(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j H_j(X)$, avec : F est la matrice hessienne de f au point X et $H_j(X)$ est la matrice hessienne de $h_j(X)$ au point X

Théorème4 : (C.N) Soit le problème : $\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \end{cases} \quad (1)$, avec : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions de classe C^2 avec ($m \leq n$), et X^* un point régulier du problème(1).

Si X^* est un **point de minimum local** du problème(1), alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{cases} (1) Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^t \\ (2) \forall y \in T(X^*): y^T L(X^*, \lambda) \geq 0 \end{cases}$$

Démonstration

(1) c'est le résultat de la condition de Lagrange (Théorème3).

Pour (2) : soit $Y \in T(X^*)$, alors il existe une courbe $\{X(t), t \in]a, b[\}$ deux fois différentiable sur l'ensemble des contraintes tel que : $X(t^*) = X^*$, et $\dot{X}(t^*) = Y$ avec $t^* \in]a, b[$ donc : t^* est le point min local de $f(X(t)) = g(t)$, aussi : $\frac{d^2 g}{dt^2}(t^*) \geq 0$ (d'après la C.N.d'optimalité de 2^{ème} ordre du problèmes sans contraintes), en appliquant la règle de chaine, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dt^2}(t^*) &= \frac{d}{dt} \left(Df(X(t)) \dot{X}(t) \right) = \dot{X}(t)^t F(X^*) \dot{X}(t) + Df(X^*) \ddot{X}(t) = Y^t F(X^*) Y + Df(X^*) \ddot{X}(t^*) \\ &\geq 0 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on sait que : } \frac{d^2}{dt^2} \lambda^t (X(t)) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\lambda^t \frac{d}{dt} h(X(t)) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^t \frac{d}{dt} h_j(X(t)) \right) = \\ \sum_{j=1}^m \lambda_j^t \frac{d}{dt} \left(Dh_j(X(t)) \dot{X}(t) \right) &= \dot{X}(t)^t [\lambda H(X(t)) \dot{X}(t)] + \lambda^t Dh_j(X(t)) \ddot{X}(t) = 0 \end{aligned}$$

Posons : $t = t^*$, on obtient : $Y^t (\lambda H(X^*)) Y + \lambda^t Dh(X^*) \ddot{X}(t^*) = 0$, on l'ajoute à l'inégalité (1), on aboutit à :

$$Y^t (F(X^*) + \lambda H(X^*)) Y = Y^t L(X^*, \lambda) \geq 0$$

Théorème5: (C.S) Soit le problème $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions de classe C^2 avec ($m \leq n$),

1. On suppose : $\exists X^* \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\begin{cases} (1) Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) = 0^t \\ (2) \forall y \in T(X^*), y \neq 0 : y^T L(X^*, \lambda) y > 0 \end{cases}$$

Alors : X^* est un point **minimum local strict** du problème de minimisation avec contraintes d'égalité

$$\text{suivant : } \begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \end{cases}$$

2. On suppose : $\exists X^* \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\begin{cases} (1) Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) = 0_{\mathbb{R}^n}^t \\ (2) \forall y \in T(X^*), y \neq 0 : y^T L(X^*, \lambda) y < 0 \end{cases}$$

Alors : X^* est un point **maximum local strict** du problème d'optimisation avec contraintes d'égalité

$$\text{suivant : } \begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \end{cases}$$

3.2 Problème de minimisation avec contraintes d'inégalité

Dans ce qui suit, considérons l'espace tangent :

$$T(X^*) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Dh(X^*)Y = 0, Dg_j(X^*)Y = 0, j \in J(X^*)\}$$

Théorème (C.N) : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec : $(m \leq n)$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ des fonctions de classe C^2 . Soit X^* est un point régulier du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si : X^* est un point de minimum local du problème(3), alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \mu \geq 0 \\ Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) + \mu^t Dg(X^*) = 0^t \\ \mu_i g_i(X^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \forall Y \in T(X^*), Y^t L(X^*, \lambda, \mu) Y \geq 0 \end{cases}$$

Théorème (C.S) :

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec : $(m \leq n)$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ des fonctions de classe C^2 .

1. On suppose : $\exists X^* \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} \mu_i \geq 0 \\ Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) + \mu^t g(X^*) = 0^t \\ \mu_i g_i(X^*) = 0^t, i = 1, \dots, p \\ \forall Y \in T(X^*, \mu), Y \neq 0 : Y^t L(X^*, \lambda, \mu) Y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Avec : } T(X^*, \mu) = \{Y \in \mathbb{R}^n : Dh(X^*).Y = 0, Dg_j(X^*).Y = 0, j \in J(X^*, \mu)\} \\ \text{et } J(X^*, \mu) = \{j : g_j(X^*) = 0, \mu_j > 0\}$$

Alors : X^* est un point **minimum local strict** du problème de minimisation avec contraintes d'inégalité

$$\text{suivant : } \begin{cases} \min f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases}$$

2. On suppose : $\exists X^* \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} \mu_i \leq 0 \\ Df(X^*) + \lambda^t Dh(X^*) + \mu^t g(X^*) = 0^t \\ \mu_i g_i(X^*) = 0^t, i = 1, \dots, p \\ \forall Y \in T(X^*, \mu), Y \neq 0 : Y^t L(X^*, \lambda, \mu) Y < 0 \end{cases}$$

Alors : X^* est un point **maximum local strict** du problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité

$$\text{suivant : } \begin{cases} \max f(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \leq 0 \end{cases}$$