

Questions de cours (4pts)

a) Soient $|E| = n$ et $|F| = m$. Le nombre d'applications de E vers F i.e. $|F^E|$ est le nombre des applications $(\overset{1}{f(1)} \overset{2}{f(2)} \dots \overset{n}{f(n)})$ avec $\forall i \in \overline{1, n} \quad f(i) \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ dont le nombre est ;

$$\underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n \text{ fois}} = m^n = |F|^{|E|}$$

(arrangements avec répétitions) 1pt

b) Applications injectives de E vers F avec $|E| = n$ et $|F| = m$ avec $1 \leq n \leq m$

$$|\text{Inject}(E, F)| = m(m-1) \dots (m-(n-1)) = A_m^n \quad (\text{arrangements sans répétitions})$$

- Tirages avec remise = m^n 0,5 1pt

- Tirages sans remise = $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ 0,5

c) fonction booléenne de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et définie de $B \times B \times \dots \times B \longrightarrow B$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

on a $|B \times B \times \dots \times B| = |B|^n = 2^n$

et donc $|B|^{|B|^n} = 2^{2^n}$ 1pt

Exercice 1

4pts

a) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les couples ordonnés (m, n) avec $m, n \in \mathbb{N}$.

On peut énumérer ces couples comme :

$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), \dots$

selon la somme croissante $(m+n)$ et selon la croissance de m .

b) Montrons par l'argument de la diagonale de Cantor que l'ensemble $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est non dénombrable

En effet, chaque élément $x \in [0, 1]$ peut s'écrire sous la forme décimale illimitée : $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_i \dots$ où pour tout i , $0 \leq x_i \leq 9$.

En supposant que l'ensemble $[0, 1]$ est dénombrable

On peut numéroter tous ses éléments sous la forme

$$\alpha_1 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$\alpha_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$\alpha_3 = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

Formons alors le nbre $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$

où β_1 est n'importe quel chiffre sauf a_1

ou β_2 " " " " sauf b_1

ou β_3 " " " " sauf c_3

on a donc $\forall i : \beta \neq \alpha_i$

Le nbre γ st un élément de $[0, 1]$ et il est différent de tout élément x_i .

Ce qui contredit, que la suite $\{x_i\}$ contient tous les éléments de $[0, 1]$

Donc l'ensemble $[0, 1]$ ne peut être énumérable.

Exercice 2 Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Pour chaque partie A de E on lui fait correspondre l'unique vecteur

$$x_A = (x_A(a_1), x_A(a_2), \dots, x_A(a_n))$$

$$\text{ou } \forall i \in \overline{1, n} : x_A(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in A \\ 0 & \text{si } a_i \notin A \end{cases}$$

donc le vecteur x_A définit la fonction

caractéristique de la partie A : $\chi: \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^n$
 $A \mapsto x_A$

• Pour $x_A = (0, 0, \dots, 0)$ on a $A = \emptyset$

• Pour $x_B = (1, 1, \dots, 1)$ on a $B = E$

$$\text{Comme } |\{0, 1\}^n| = 2^n = |\mathcal{P}(E)|$$

Exercice 3 (8 pts)

1/ Soit E l'ensemble de n points du plan.

(3 points quelconques ne sont pas alignés)

Pour chaque 2 points A, B on peut former la droite $D_{A,B}$ qui passe par les points A, B . (1,5 pts)

Et comme $D_{A,B} = D_{B,A}$, donc le nombre de droites est C_n^2 . [chaque 2 points définissent une droite]

2) De même, chaque 3 points définissent un plan de l'espace et par suite le nombre de plans est C_n^3 . (1,5 pts)

③ le développement de $(1+x)^n$ par le binôme de Newton donne

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad \text{(1)}$$

* pour $x=1$

on a

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n$$

= Le nombre de toutes les parties d'un ensemble de n éléments.

* pour $x=-1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$$

= 4-

Et comme

$$\begin{aligned}(1+1)^n - (1-1)^n &= C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n \\ &= [(C_n^0 - C_n^1) + (C_n^2 - C_n^3) + \dots] \\ &= 2[C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_n^1 + C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n = 2^{n-1}$$

2/ Le nbre d'entiers positifs $n \leq 100$,
non divisibles ni par 2, ni par 3 ni par 5.

On note par

C_2 : le nombre n est divisible par 2,

C_3 : le nombre n est divisible par 3

C_5 : le nombre n est divisible par 5.

2pts

$$\begin{aligned}N(\overline{C_1} \overline{C_3} \overline{C_5}) &= N - N(C_1) - N(C_2) - N(C_3) \\ &\quad + N(C_1 C_2) + N(C_1 C_3) + N(C_2 C_1) \\ &\quad - N(C_1 C_2 C_3) \\ &= 100 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor\end{aligned}$$

nombre
ni divisible par 2
ni par 3
ni par 5

$$\begin{aligned}&= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 \\ &= 100 - 70 - 3 + 32 = 132 - 106 \\ &= 26\end{aligned}$$