

Département des Mathématiques

Master 1(Algèbre et Mathématiques Discrètes)

Calcul formel et programmation TP(03)**Exercice 1**

Construire, calculer et factoriser le déterminant de Van der Monde suivante (penser à la commande Vandermonde Matrix) :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer A multiplier par sa transposée ;
- 2) Calculer et factoriser le déterminant de A ;
- 3) Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A ;
- 4) Diagonaliser la matrice A grâce à la commande **JordanForm**.

Exercice 3

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 58 & 52 & 36 \\ -29 & 187 & 9 \\ -145 & 65 & 219 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer l'inverse de A .
- 2) Diagonaliser la matrice A grâce à la commande **JordanForm**. Vérifier que $A = PDP^{-1}$

- 3) Calculer la puissance n -ième de la matrice A en utilisant la propriété $A^n = P D^n P^{-1}$.
- 4) Vérifier le résultat pour $n=0$, $n=1$, $n=2$, et $n=5$, d'une part en remplaçant n par sa valeur dans le résultat obtenu précédemment, d'autre part en calculant directement la puissance correspondante de A .

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer une base de $\ker A$, une de $\text{Im } A$, une de $\ker B$ et une de $\text{Im } B$.
- 2) Déterminer les réels λ tels que la matrice $A + \lambda B$ ne soit pas inversible.
- 3) Résoudre les systèmes $AX = Y$ et $BX = Y$ pour les deux cas

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$ défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y - z - 3t, y + 3z + t, -x + y + z + 3t, -3x + y + 3z - 2t)$$

- 1) Donner la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
- 2) Donner la dimension de $\text{Im } f$, ainsi qu'une base.
- 3) Donner la dimension de $\ker f$, ainsi qu'une base.
- 4) Les sous-espaces $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6

Soit $n \geq 2$.

- 1) Calculer les rangs des matrices carrées d'ordre n : $(|i - j|)_{ij}$ et $(i + j)_{ij}$ pour n variant de 2 à 10.
- 2) Quelles conjectures peut-on déduire?
- 3) Montrer que ces conjectures restent vraies pour $n \in \{2, \dots, 100\}$.